Real Analysis

Galois37

2026 年 6 月 2 日

目录

第一章　测度论

1.1　体积与外测度

1.1.1　体积究竟是什么？

我们在中学阶段（甚至更早）时常听到这样一句话：体积是物体所占据空间的大小。这个描述十分模糊，也没有说明该如何计算体积。为了严谨定义和计算体积，我们需要引入一套新的理论——测度论。在此之前我们要做一些准备工作。

首先，什么对象是比较好的去定义体积的？一个很自然的想法是 $\mathbb{R}^d$ 中的矩形

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

这是 d 个闭区间的笛卡尔积，我们定义其体积为

$$|R| = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d)$$

该定义对开矩形也同样适用。

接着考虑更一般的点集，例如 $\mathbb{R}$ 上的开集。我们有如下结论：

定理 1.1.1. $\mathbb{R}$ 的每个开子集 O 可唯一地写成可数个不相交的开区间并。

这个定理的证明可在教材的 P6 中找到且难度不大，我们在这里提供另一种视角：在 O 上定义一种等价关系：

$$x \sim y \iff \lambda x + (1-\lambda)y \in O, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

即 x 和 y 之间的所有点都在 O 中。容易证明这是一个等价关系，而且每个等价类都是一个开区间。又因为等价类是两两不交的，从而定理得证。

然而这个定理不能直接推广到 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 上。可以看到章末习题的 Exercise12，其中（b）小问指出：

定理 1.1.2. 在 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 上，开连通集合 Ω 是开矩形不相交的并当且仅当 Ω 自身是一个开矩形。

这其实像是脑筋急转弯，**因为连通集的定义就是不能写成两个开集的不交并，所以 Ω 如果能被一簇开矩形覆盖，那这簇开矩形就只包含一个开矩形**，从而 Ω 也是开矩形。反之亦然。

这个时候我们也有一个很自然的想法：是什么导致了这两种情形的差别呢？这是因为 $\mathbb{R}$ 上的开集只有一种类型即开区间，而 $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 上的开集不止开矩形一种。又因为连通集只能被自己覆盖（要求覆盖的开集不交），那么显然那些不是开矩形的开集就做不到这一点。

既然如此，我们退而求其次，将条件减弱为“几乎不相交”，即矩形的内部不相交，边界可以重叠。于是我们有如下结论：

定理 1.1.3. *$\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ 的每个开子集 O 可写为可数个几乎不相交的闭方体的并。*

这个证明也是自然的，类似二分法一样，每次用更小的矩形填充即可。贴一下证明

1.1.2 外测度

接下来我们用刚刚的结论给出外测度的定义：

定义 1.1.4. *若 E 是 $\mathbb{R}^d$ 的任意子集，则定义 E 的外测度为*

$$m_*(E) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

其中下确界对所有覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ 取（Q_j 为闭矩形）。

定理 1.1.5. *外测度有如下性质：*

1. *对每个 $\epsilon > 0$，存在覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ 满足*

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q_j) \leq m_*(E) + \epsilon.$$

2. *单调性：若 $E_1 \subset E_2$，则 $m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$。*

3. *次可加性：若 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$，则 $m_*(E_1) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(E_j)$。*

4. *若 $E \subset R^d$，则 $m_*(E) = \inf m_*(O)$，这里下确界对所有包含 E 的开集 O 取。*

5. *若 $E = E_1 \cup E_2$，且 $d(E_1, E_2) > 0$，则 $m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$。*

6. *若集合 E 是可数个几乎不相交的矩形的并，即 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$，则 $m_*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$。*

证明. 对于 (1)，这由下确界的定义可以直接得出。

对于 (2)，注意到任何覆盖 E_2 的矩形簇也必然覆盖 E_1 即可得出单调性。

对于 (3)，我们不妨设每个 $m_*(E_j) < \infty$，否则不等式显然成立。对任意的 $\epsilon > 0$，我们对每个 j 都有闭矩形覆盖 $E_j \subset \bigcup_{k=1}^\infty Q_{k,j}$，且满足

$$\sum_{k=1}^\infty |Q_{k,j}| \le m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$$

则有 $E \subset \bigcup_{j,k=1}^\infty Q_{k,j}$，因此

$$\begin{aligned} m_*(E) \le \sum_{j,k} |Q_{k,j}| &= \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |Q_{k,j}| \\ &\le \sum_{j=1}^\infty \left(m_*(E_j) + \frac{\epsilon}{2^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty m_*(E_j) + \epsilon. \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知 $m_*(E_1) \le \sum_{j=1}^\infty m_*(E_j)$。

注 1.1.6. 取 $\frac{\epsilon}{2^j}$ 是实分析中一个常用的估计技巧。

对于 (4)，我们只需证明 $\inf m_*(O) \le m_*(E)$，反向的不等式根据单调性是平凡的。对任意的 $\epsilon > 0$，选取矩形 Q_j 使得 $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$，且

$$\sum_{j=1}^\infty |Q_j| \le m_*(E) + \frac{\epsilon}{2}$$

令 Q_j^0 为包含 Q_j 的开矩形，且满足 $|Q_j^0| \le |Q_j| + \epsilon/2^{j+1}$。则 $O = \bigcup_{j=1}^\infty Q_j^0$ 是开集，且根据次可加性，我们有

$$\begin{aligned} m_*(O) \le \sum_{j=1}^\infty m_*(Q_j^0) &= \sum_{j=1}^\infty |Q_j^0| \\ &\le \sum_{j=1}^\infty \left(|Q_j| + \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \right) \\ &\le \sum_{j=1}^\infty |Q_j| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\le m_*(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

从而 $\inf m_*(O) \le m_*(E)$，结合反向的不等式可以得到 $m_*(E) = \inf m_*(O)$。

注 1.1.7. 这条性质启发我们可以用开集从外部逼近一个集合 E（在外测度的意义下）。

对于 (5)，同样我们只需证明 $m_*(E_1) + m_*(E_2) \le m_*(E)$。首先我们选取 δ 使得 $d(E_1, E_2) > \delta > 0$，接着选取闭矩形覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$，满足

$$\sum_{j=1}^\infty |Q_j| \le m_*(E) + \epsilon,$$

且每个闭矩形的直径都小于 δ。在这种情形下每个矩形至多与集合 E_1 和 E_2 中的一个相交，从而我们有指标集 J_1 和 J_2，满足 $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ 并且

$$E_1 \subset \bigcup_{j\in J_1}^{\infty} Q_j \quad 以及 \quad E_2 \subset \bigcup_{j\in J_2}^{\infty} Q_j.$$

因此

$$\begin{aligned} m_*(E_1) + m_*(E_2) &\leq \sum_{j\in J_1} |Q_j| + \sum_{j\in J_2} |Q_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \\ &\leq m_*(E) + \epsilon. \end{aligned}$$

由于 ϵ 选取的任意性，该条性质得证。

最后对于 (6)，同样我们只需证明 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E)$。为此我们令 $\tilde{Q}_j$ 表示严格包含于 Q_j 的矩形且满足 $|Q_j| \leq |\tilde{Q}_j| + \epsilon/2^j$。则对于每个自然数 N，矩形 $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots \tilde{Q}_N$ 两两不交且互相之间存在有限的距离，反复利用性质 (5) 可得

$$m_*\left(\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} |\tilde{Q}_j| \geq \sum_{j=1}^{N} \left(|Q_j| - \epsilon/2^j\right) \geq \sum_{j=1}^{N} |Q_j| - \epsilon$$

由于 $\bigcup_{j=1}^{N} \tilde{Q}_j \subset E$，于是有 $m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{N} |Q_j| - \epsilon$，最后令 $N \to \infty$ 便得到

$$m_*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| - \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知 $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq m_*(E)$，结合反向的不等式该条性质得证。 □

注 1.1.8. 从 (5) 和 (6) 两条性质我们可以总结出在特定条件下，外测度是具有**可数可加性**的。然而如果 E_1 和 E_2 仅仅是 $\mathbb{R}^n$ 的两个不相交的子集（此时它们的距离可能为 0），我们一般是不能得出 $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$ 的。后面我们会构造一个经典的反例——Vitali 集。

1.2 可测集与 Lebesgue 测度

1.2.1 可测集

事实上, 可数可加性是一个非常重要的性质, 是后面严格定义 Lebesgue 积分的基础。为此我们要“剔除”掉那些不满足这条性质的集合，于是自然就有了可测集和 Lebesgue 测度。下面我们给出可测集的定义:

定义 1.2.1. 对于 $\mathbb{R}^d$ 的子集 E，若对任意的 $\epsilon > 0$，都存在开集 $O \supset E$，且有

$$m_*(O \setminus E) \leq \epsilon$$

则称 E 是 *Lebesgue* 可测（简称可测）的，且若 E 可测，我们定义其 *Lebesgue* 测度为

$$m(E) = m_*(E).$$

此外我们有如下等价定义，读者可自行验证：

1. 对于 $\mathbb{R}^d$ 的子集 E，若对任意的 $\epsilon > 0$，都存在闭集 $F \subset E$，且有 $m_*(E \setminus F) \leq \epsilon$，则称 E 是可测的。

2. 对于 $\mathbb{R}^d$ 的子集 E，若对任意的集合 $T \subset R^d$，都满足

$$m_*(T) = m_*(T \cap E) + m_*(T \cap E^c),$$

则称 E 是可测的。

通过定义我们可以得出开集、闭集、外测度为 0 的集合都是可测的，**且可测集簇在集合论熟知的运算下封闭**。需要注意的是，这里的运算至多是可数次，不可数次的运算是不被允许的！

接下来我们证明可测集满足可数可加性。

定理 1.2.2. 若 $E_1, E_2, \ldots$ 是两两不交的可测集，且 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$，则

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

证明. 先假设每个 E_j 都是有界的，对每个 j，存在闭集 $F_j \subset E_j$ 使得

$$m_*(E_j \setminus F_j) \leq \epsilon/2^j.$$

对每个固定的 N，集合 $F_1, F_2, \ldots, F_N$ 是不相交的紧集，从而它们两两有正的距离（这个结论并不是那么显然，我们会在后面补充证明这一点），于是根据定理 1.1.5 的第 (5) 条我们有

$$m\Big(\bigcup_{j=1}^{N} F_j\Big) = \sum_{j=1}^{N} m(F_j).$$

又因为 $\bigcup_{j=1}^{N} F_j \subset E$，所以

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{N} m(F_j) \geq \sum_{j=1}^{N} m(E_j) - \epsilon.$$

令 $N \to \infty$，并结合 ϵ 的任意性，我们有

$$m(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

至于反向的不等式，根据次可加性是平凡的，从而在每个 E_j 有界的时候我们证明了结论。

现考虑一般的情形，我们选取任意递增趋向于 $\mathbb{R}^d$ 的矩形序列 $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$，即 $Q_k \subset Q_{k+1}$ 且 $\bigcup_{k=1}^\infty Q_k = \mathbb{R}^d$。再令 $S_1 = Q_1$ 且 $S_k = Q_k \backslash Q_{k-1}$ $(k \geq 2)$。我们定义 $E_{j,k} = E_j \cap S_k$，则有

$$E = \bigcup_{j,k} E_{j,k}$$

以上的并是不相交的而且每个 $E_{j,k}$ 都是有界的，此外 $E_j = \bigcup_{k=1}^\infty E_{j,k}$ 这个并也是不相交的，从而我们有

$$m(E) = \sum_{j,k} m(E_{j,k}) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty m(E_{j,k}) = \sum_{j=1}^\infty m(E_j).$$

□

最后我们补充证明刚刚用到的一个不太显然的结论，将其加强为：若 F 是闭集，K 是紧集，且它们不相交，则 $d(K, F) > 0$。

证明. 由于 F 是闭集，对每个点 $x \in K$ 存在 $\delta_x > 0$ 使得 $d(x, F) > 2\delta_x$。考虑

$$\bigcup_{x \in K} B(x, \delta_x)$$

这是紧集 K 的一个开覆盖，从而其有一个有限子覆盖，记为 $\bigcup_{j=1}^N B(x_j, \delta_j)$。令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N\}$，则对任意的 $x \in K$ 和 $y \in F$，y 必然落在某个 $B(x_j, \delta_j)$ 里，从而我们有

$$|y - x| \geq |y - x_j| - |x_j - x| \geq 2\delta_j - \delta_j \geq \delta,$$

即 $d(E, F) \geq \delta > 0$。综上所述，我们证明了可测集的可数可加性。 □

注 1.2.3. 我们可以思考一下为什么一定要限制某一个集合是紧集，如果仅仅是闭集呢？事实上我们可以构造出反例，例如 $\{n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{n + 1/n\}_{n=1}^\infty$。从这个反例也能看出紧集所蕴含的有限性是必要的，同时这也解释了为什么在证明可加性时要先考虑每个 E_j 都是有界的，对于一般的情形也只是通过一些转化将问题转化成了有限的情形。

1.2.2 Lebesgue 测度

接下来我们研究测度的两个基本性质——连续性和平移不变性。

定义 1.2.4 (1.2.2). 设 $E_1, E_2, \ldots$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的可数子集，若对所有的 $k \geq 1$，有 $E_k \subset E_{k+1}$ 且 $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$，则称 $\{E_k\}$ 递增趋向 E，记为 $E_k \uparrow E$。

类似地，若对所有的 $k \geq 1$，有 $E_k \supset E_{k+1}$ 且 $\bigcap_{k=1}^\infty E_k = E$，则称 $\{E_k\}$ 递减趋向 E，记为 $E_k \downarrow E$。

我们有如下的结论：

定理 1.2.5. 假设 $E_1, E_2, \ldots$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的可数子集。

1. 若 $E_k \uparrow E$，则 $m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$。

2. 若 $E_k \downarrow E$ 且对某个 k，$m(E_k) < \infty$，则 $m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$。

证明. 对于 (1)，约定 $E_0 = \varnothing$，并令 $G_k = E_k \setminus E_{k-1}$。这些 G_k 是可测且不相交的，于是

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} m(G_k) = \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} G_k\right) = \lim_{N\to\infty} m(E_N).$$

对于 (2)，我们不妨设 $m(E_1) < \infty$（这是因为极限是在无穷远处的项的性质）。令 $G_k = E_k - E_{k+1}$，则

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

利用可数可加性，我们有

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} (m(E_k) - m(E_{k+1})) \\ &= m(E) + m(E_1) - \lim_{N\to\infty} m(E_N). \end{aligned}$$

由于 $m(E_1) < \infty$，我们便完成了证明。 □

注 1.2.6. 从最后一步看出假设测度有限也是必要的。事实上如果没有这个限制，我们可以很容易找到反例：$E_k = (k, \infty)$，每一个 E_k 测度都是无穷但是它们的交是空集。

作为这个结论的一个简单应用，我们将注意力转到章末的一道习题（T5）：

习题 1.2.7. 假设 E 是给定的集合，O_n 定义为 $O_n = \{x : d(x, E) < 1/n\}$。证明若 E 是紧集，则

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m(O_n).$$

证明. 我们有 $O_n \supset O_{n+1}$ 且 $\lim_{n\to\infty} O_n = \{x : d(x, E) = 0\} = \bar{E} = E$，另外由于 E 是紧集，每个 O_n 的测度都是有限的，从而利用结论 (2) 便完成的证明。 □

同时我们也可以看出这里为什么要限制 E 是紧集：若 E 不是闭集，则 E 的闭包不会等于其自己，事实上存在开集，其边界有正测度（可考虑胖康托集的补集）；若 E 是无界的，则结论 (2) 不再适用。

接着我们研究测度的平移不变性。

定理 1.2.8. 若集合 $E \subset R^d$ 是可测的且 $h \in R^d$，则集合 $E_h = E + h = \{x + h : x \in E\}$ 也是可测的，且 $m(E+h) = m(E)$。

这个结论可以说是平凡的，因为对矩形显然是成立的，至于更一般的情形我们可以用矩形去逼近。**这种“逼近”的思想在分析学中无处不在**。

然后我们就可以开始利用平移不变性来构造一个经典的不可测集——Vitali 集。

考虑 $[0,1]$ 中的实数间的一个关系：$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$，不难验证这是一个等价关系，从而我们可以将 $[0,1]$ 划分成所有等价类的不交并，即：

$$[0,1] = \bigcup_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}$$

基于选择公理，我们从每个等价类 ε_{α} 中选取一个元素 x_{α} 构造一个集合

$$N = \bigcup_{\alpha} \{x_{\alpha}\}.$$

定理 1.2.9. 上述构造的集合 N 是不可测的。

证明. 用反证法，假设 N 是可测的。令 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $[-1,1]$ 中所有有理数的列举，考虑平移

$$N_k = N + r_k.$$

我们有如下的观察：

1. N_k 是两两不交的。

2. $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$。

对于 (1)，假设存在 k, k' 使得 N_k 和 $N_{k'}$ 交集非空，则存在有理数 $r_k \neq r_{k'}$ 以及 α, β 使得 $x_{\alpha} + r_k = x_{\beta} + r_{k'}$，于是

$$x_{\alpha} - x_{\beta} = r_k - r_{k'} \in \mathbb{Q},$$

这和 x_{α}, x_{β} 在不同等价类矛盾。

对于 (2)，对任意的 $x \in [0,1]$，存在某个 α 使得 $x \sim x_{\alpha}$，且 $x - x_{\alpha} \in \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$，所以第一个包含关系成立。第二个包含关系是平凡的，因为每个 N_k 都属于 $[-1,2]$。

利用测度的平移不变性，结合上面的观察，我们有

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(N) \leq 3.$$

无论 $m(N) = 0$ 还是 $m(N) > 0$，上式都不可能成立，从而我们推出了矛盾。

综上所述，我们构造的集合 N 是不可测的。 □

注 1.2.10. 此外这也解释了为什么可测集的不可数次运算是不封闭的，事实上我们可以考虑对上述的集合 N 有 $N = \bigcup_{x \in N} \{x\}$。这是不可数个可测集的并，但 N 是不可测的。

1.3 有关集合测度的一些习题

习题 1.3.1. 若 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_d)$ 是一个 d 元正数组，E 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个子集。定义

$$\delta E = \{(\delta_1 x_1, \delta_2 x_2, \ldots, \delta_d x_d) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in E\}.$$

证明只要 E 可测，那么 δE 可测，且

$$m(\delta E) = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_d \, m(E).$$

证明. 先考虑 E 是 $\mathbb{R}^d$ 中的闭矩形，容易看出 δE 也是 $\mathbb{R}^d$ 中的闭矩形，此时结论是平凡的。现考虑一般情形，根据外测度的定义我们有

$$m_*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| \ : \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\right\},$$

又因为对每个覆盖 $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$，我们有 $\delta E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \delta R_j$，所以取下确界可以得到

$$\begin{aligned} m_*(\delta E) &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\delta R_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\right\} \\ &= \delta_1 \ldots \delta_d \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j\right\} \\ &= \delta_1 \ldots \delta_d \, m_*(E). \end{aligned}$$

接下来我们证明 δE 是可测的。利用上文提到的一个测度的等价定义，我们只需证明对任意的 $A \subset R^d$，都有

$$m_*(A) = m_*(\delta E \cap A) + m_*(\delta E \cap A^c).$$

事实上注意到 δ 可逆，且 $\delta(A \cap B) = (\delta A) \cap (\delta B)$。记 $A' = \delta^{-1} A$，则

$$\begin{aligned} m_*(\delta E \cap A) + m_*(\delta E \cap A^c) &= m_*(\delta E \cap \delta A') + m_*(\delta E \cap (\delta A')^c) \\ &= m_*(\delta(E \cap A')) + m_*(\delta(E \cap (A')^c)) \\ &= \delta_1 \ldots \delta_d \left[m_*(E \cap A') + m_*(E \cap (A')^c)\right] \\ &= \delta_1 \ldots \delta_d \, m_*(A') \\ &= m_*(\delta A') = m_*(A). \end{aligned}$$

从而 δE 也是可测的，且其测度为 $\delta_1 \ldots \delta_d \, m(E)$。 □

注 1.3.2. 本题较为基础，但体现了一个很重要的思想——**逼近**。我们先在矩形的情形证明结论，然后用矩形去逼近一般的情形。在后面的学习中，我们将反复运用到这种思想。

习题 1.3.3. 设 L 是 $\mathbb{R}^d$ 上的线性变换，证明若 E 是可测的，则 $L(E)$ 也是可测的。

证明. 我们先证明一个引理：

引理：任何一个可测集 E 都可以写成一个 F_σ 集（可数个闭集的并）和一个零测集的不交并。

我们利用可测集的一个等价定义，即对任意的 $\epsilon_n = 1/n$，存在闭集 F_n 使得 $m_*(E \setminus F_n) < 1/n$，考虑 $F = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$，则当 E 的测度有限时，我们有 $m_*(E \setminus F) = m_*(E) - m_*(F) = 0$。这是一个零测集，而 F 根据定义是一个 F_σ 集，从而我们可以将 E 拆分成一个 F_σ 集和一个零测集的并。至于 E 的测度不是有限的情形，可以考虑将 E 先划分成可数个有限测度的可测集，再对每一个可测集分解，由于可数个 F_σ 集的并依旧是 F_σ，可数个零测集的并也是零测集。从而 E 的测度为无穷时引理的结论也成立。

回到原题，L 是有限维的线性映射，故由 Cauchy 不等式知存在 $M \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $v \in \mathbb{R}^d$，都有 $\|L(v)\| \le M\|v\|$，从而

$$\|L(x) - L(y)\| = \|L(x-y)\| \le M\|x-y\|,$$

即 L 是 Lipschitz 连续的。由连续函数的性质，L 把紧集映射到紧集，从而也把 F_σ 集映射到 F_σ 集。若集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是矩形，则 $m_*(L(E)) = |\det(L)|\, m_*(E)$，利用矩形逼近，我们推出 L 将零测集映射到零测集，从而 $L(E)$ 是一个 F_σ 集和一个零测集的并，因此 $L(E)$ 可测。 □

刚刚的题目提到了 F_σ 集，这是一类很重要的集合，接下来这道题我们用拓扑的角度研究一下它们的性质。

习题 1.3.4.

1. 证明一个闭集是 G_δ 集而一个开集是 F_σ 集；
2. 证明存在不是 G_δ 集的 F_σ 集；
3. 证明存在一个既非 G_δ 集也非 F_σ 集的 Borel 集。

证明. (1) 设 F 是一个闭集，考虑 $O_n = \{x : d(x,F) < 1/n\}$，我们有 $\bigcap_{n=1}^\infty O_n = \bar{F} = F$，这说明 F 是可数个开集的交，即 F 是 G_δ 集。设 G 是一个开集，则由

$$G = F^c = \Big(\bigcup_{n=1}^\infty O_n\Big)^c = \bigcap_{n=1}^\infty (O_n)^c$$

可得 G 是一个 F_σ 集。

(2) 我们考虑有理数集 $\mathbb{Q}$，这是一个 F_σ 集。假设其还是一个 G_δ 集，则存在一簇开集 $\{O_n\}_{n=1}^\infty$，使得 $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^\infty O_n$。由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，从而每个 O_n 也是稠密的。我们考虑

$$\Big(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})\Big) \cap \Big(\bigcap_{n=1}^\infty O_n\Big)$$

这是一个空集，但由 Baire 纲定理，可数个稠密集的交仍然是稠密集，矛盾！从而 $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集。

（利用这个结论我们也可以证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的函数使得其在有理点连续，在无理点不连续。）

(3) 一个比较自然的想法是把一个不是 G_δ 集的 F_σ 集和一个不是 F_σ 集的 G_δ 集拼在一起，从而考虑

$$\mathbb{Q}^- \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \geq 0\}$$

容易验证这是一个既非 G_δ 集也非 F_σ 集的 Borel 集。 □

习题 1.3.5. 假设 $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ 是一簇可测集合，且 $\sum_{k=1}^\infty m(E_k) < \infty$。令

$$E = \limsup E_k = \left\{x \in \mathbb{R}^d : x \text{ 属于无穷多个} E_k\right\}.$$

证明 E 可测且 $m(E) = 0$。

证明. 根据定义，我们有 $E = \bigcap_{N=1}^\infty \bigcup_{n=N}^\infty E_n$。因为 $\sum_{k=1}^\infty m(E_k) < \infty$，所以对任意的 ϵ，存在 M 使得 $\sum_{k=M}^\infty m(E_k) < \epsilon$。利用外测度的单调性，我们有

$$m_*(E) \leq m_*\Big(\bigcup_{k=M}^\infty E_k\Big) \leq \sum_{k=M}^\infty m(E_k) < \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性我们有 $m_*(E) = 0$，从而 E 可测且 $m(E) = 0$。 □

注 1.3.6. 这个简单的引理其实非常重要，它展示了如何分离出一个测度为零的集合，从而证明某个可测函数有某些性质**“几乎处处成立”**。接下来我们展示其在丢番图逼近的一个简单应用。

习题 1.3.7. 考虑集合

$$W_z = \left\{x \in [0,1] : |x - p/q| < 1/q^z \text{ 对于无穷多个} q \text{ 成立}\right\}.$$

证明当 $z > 2$ 时，有 $m(W_z) = 0$。

证明. 对每一个正整数 q，考虑集合

$$E_q = \bigcup_{p=1}^q \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right).$$

我们有

$$m(E_q) \leq \sum_{p=1}^q \frac{2}{q^{2+\epsilon}} = q \cdot \frac{2}{q^{2+\epsilon}} = \frac{2}{q^{1+\epsilon}}.$$

从而 $\sum_{q=1}^\infty m(E_q) < \infty$，另外注意到 W_z 刚好就是 $\limsup E_q$，从而由 Borel-Cantelli 引理，我们得到了 W_z 是一个零测集。 □

习题 1.3.8. 设 E_1 和 E_2 是 $\mathbb{R}^d$ 的两个紧子集，且 $E_1 \subset E_2$。若 $m(E_1) = a$，$m(E_2) = b$，则对任意的 $a < c < b$，存在紧集 E 使得 $m(E) = c$。

证明. 令 B_t 为半径为 t 的闭球，定义 $E_t = E_1 \cup (E_2 \cap B_t)$，我们证明 $m(t)$ 在任意的闭区间上是关于 t 连续的。事实上对任意单调递增趋向于 t_0 的序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$，我们有 $E_{t_k} \uparrow E_{t_0}$，从而利用测度向上的连续性，有

$$\lim_{t_k \to t_0^-} m(E_{t_k}) = m(E_{t_0}),$$

即 $m(t)$ 左连续。另外注意到 E_t 是紧集，$m(t)$ 在闭区间上是有界的，从而利用测度的向下连续性，$m(t)$ 也是右连续的。最后利用连续函数的介值定理，存在 t_0 使得 $m(E_{t_0}) = c$，且 E_{t_0} 是紧集，得证！ □

习题 1.3.9. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个子集且 $m_*(E) > 0$，证明对任意的 $0 < \alpha < 1$，存在一个开区间 I 满足

$$m_*(E \cap I) \geq \alpha m_*(I).$$

证明. 选择一个包含 E 的开集使得 $m_*(E) \geq \alpha m_*(O)$，根据 O 可以被分解成可数个开区间的不交并，记 $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$，$I_k$ 两两不交。假设对所有的 k，都有 $m_*(E \cap I_k) < \alpha m_*(I_k)$，则

$$m_*(E) < m_*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E \cap I_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m_*(E \cap I_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \alpha m_*(I_k) = \alpha m_*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big) = \alpha m_*(O),$$

这和 O 的选取矛盾，从而必存在某个 k 使得 $m_*(E \cap I_k) \geq \alpha m_*(I_k)$。 □

注 1.3.10. 我们可以以一种直观的方式描述这个结论：$\mathbb{R}$ 上的一个具有正外测度的集合可以几乎完全覆盖某一个开区间。

习题 1.3.11. 令 E 是 $\mathbb{R}$ 的一个可测子集，且 $m(E) > 0$，证明 E 的差集

$$\{z \in \mathbb{R} : z = x - y,\ \text{其中} x, y \in E\}$$

包含一个以原点为中心的开区间。

证明. 由上一问的结论，存在一个开区间 I 使得 $m(E \cap I) \geq \frac{3}{4} m(I)$，记 $E_0 = E \cap I$，我们证明当 $|h|$ 充分小的时候有 $E_0 \cap (E_0 + h) \neq \varnothing$。事实上假设 $E_0 \cap (E_0 + h) = \varnothing$，由于 $E_0 \subset I$，我们有 $(E_0 \cup (E_0 + h)) \subset (I \cup (I + h))$。根据测度的性质，我们有

$$m(I \cup (I + h)) \geq m(E_0 \cup (E_0 + h)) = m(E_0) + m(E_0 + h) = 2m(E_0) \geq \frac{3}{2} m(I).$$

然而当 $|h| < \frac{1}{2} m(I)$ 时，显然有 $m(I \cup (I + h)) < \frac{3}{2} m(I)$，矛盾！这说明当 $|h| < \frac{1}{2} m(I)$ 时，$E_0 \cap (E_0 + h) \neq \varnothing$，从而存在 $x \in E$，使得 $x - h \in E$。故 $h \in E - E$，这说明 $E - E$ 包含一个以原点为中心的开区间。 □

注 1.3.12. 个人认为这是一个极具启发性的结论，将测度的性质和拓扑的性质巧妙地联系在了一起。进一步我们可以推出以下结论：

设 E 和 F 是两个具有正测度的集合，则 $E + F$ 包含一个区间。（证明方法是类似的）

第二章　勒贝格积分理论

2.1　可测函数与逼近

先前我们定义了测度并研究了其最基本的一些性质，现在我们给出可测函数的定义

定义 2.1.1. 对一个定义在 $\mathbb{R}^d$ 的可测集 E 上的函数 f，若对所有的 $a \in \mathbb{R}$，集合

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\}$$

可测，则称 f 可测。(在不产生混淆的情况下，之后我们将 $\{x \in E : f(x) < a\}$ 简单记为 $\{f < a\}$)

在定义中 $\{f < a\}$ 和 $\{f \le a\}$ 是等价的，这是因为

$$\{f \le a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < a + 1/k\}, \qquad \{f < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \le a - 1/k\}$$

利用可测集的可数次运算的封闭性即可得出等价性。类似的我们有 $\{f > a\}$ 也是一个等价的定义,同理也可以得出若 f 是有限值的,则 f 可测当且仅当对任意的区间 $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $\{a < f < b\}$ 也是可测的。

我们可以思考一下为什么可测函数要如此定义。我们知道测度和可测函数的理论都是为 Lebesgue 积分理论做铺垫，进而弥补 Riemann 积分的缺陷（例如使可积函数空间完备化)。而这两种积分定义的区别，从直观上讲，就是“横着切”和“竖着切”的区别。Lebesgue 积分是**划分值域**, 考虑落在 (a,b) 这个小区间内的点集的测度 $m(\{a < f < b\})$, 所以我们必须以 $\{a < f < b\}$ 可测为前提，这就对应了我们的定义。

根据定义，我们可以得到可测函数的如下性质

(1) 有限值函数 f 是可测的，当且仅当对每个开集 O，$f^{-1}(O)$ 可测，当且仅当对每个闭集 F , $f^{-1}(F)$ 可测

(2) 若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上连续，则 f 可测。若 f 是可测与有限值的且 ϕ 连续，则 $\phi \circ f$ 可测

(3) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可测函数列，则 $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ 都是可测的

(4) 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可测函数列，且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，则 f 可测

(5) 若 f 和 g 都是可测的，则 $f^k (k \in \mathbb{N}^+), f+g, fg$ 都是可测的

这些性质都很容易验证，故在此略过证明。

现在我们引入“几乎处处成立”的概念，这里指不成立的点构成一个零测集。例如令 $f \equiv 0$，g 为 Dirichlet 函数，则 $f=g$ 几乎处处成立，记作

$$f(x)=g(x) \qquad a.e.x$$

由于一个可测集去除一个零测集依旧是可测的，故上述的性质中对 f 的限制都可以减弱为“几乎处处成立”。

定理 2.1.2. 设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非负可测函数，则存在递增非负简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得对所有的 x，有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x).$$

证明. 对于 $N\geq 1$，令 Q_N 表示中心在原点、边长为 N 的方体，定义

$$F_N(x)=\begin{cases} f(x), & x\in Q_N \text{ 且} f(x)\leq N, \\ N, & x\in Q_N \text{ 且} f(x)>N, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $N\to\infty$ 时，$F_N(x)\to f(x)$。对固定的 $N,M\geq 1$，定义

$$E_{\ell,M}=\left\{x\in Q_N:\frac{\ell}{M}<F_N(x)\leq\frac{\ell+1}{M}\right\},\quad 0\leq\ell<NM$$

我们构造

$$F_{N,M}(x)=\sum_{\ell}\frac{\ell}{M}\chi_{E_{\ell,M}}(x)$$

容易看出每个 $F_{N,M}$ 是对所有 x 满足 $0\leq F_N(x)-F_{N,M}(x)\leq 1/M$ 的简单函数，令 $\varphi_k=F_{2^k,2^k}$，则 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 递增 **(为什么选择 2^k 为下标，如果选择 k 为下标呢？事实上后者不能保证 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 递增)** 且对所有 x 有 $0\leq F_{2^k}(x)-\varphi_k(x)\leq 1/2^k$，从而当 $k\to\infty$ 时，$\varphi_k(x)\to f(x)$。 □

定理 2.1.3. 设 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数，则存在简单函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

$$|\varphi_k(x)|\leq|\varphi_{k+1}(x)| \quad \text{且对所有} x, \quad \lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$$

证明. 我们将 $f(x)$ 分解为 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，其中

$$f^+(x)=\max(f(x),0), \quad f^-(x)=\max(-f(x),0)$$

由于 $f^+(x)$ 和 $f^-(x)$ 非负，故由 Theorem 1.2.1 知存在递增简单非负函数列 $\left\{\varphi_k^+(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\left\{\varphi_k^-(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ 分别逐点收敛于 f^+ 和 f^-。令 $\varphi_k(x)=\varphi_k^+(x)-\varphi_k^-(x)$，则 $\varphi_k(x)$ 逐点收敛于 $f(x)$ 且

$$|\varphi_k(x)|=\varphi_k^+(x)+\varphi_k^-(x)\leq\varphi_{k+1}^+(x)+\varphi_{k+1}^-(x)=|\varphi_{k+1}(x)|.$$

□

更进一步地，我们可以用阶梯函数逼近可测函数。

定理 2.1.4. 设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测，则存在阶梯函数列 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=f(x)\quad a.e.x$$

证明. 我们只需证明对任意的简单函数 $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{E_i}$，存在阶梯函数列 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得其几乎处处收敛于 $\varphi(x)$。

对每个可测集 E_i，存在互不相交的开矩形 $Q_1,Q_2,\ldots,Q_M$ 使得 $m(E_i\Delta\bigcup_{j=1}^{M}Q_j)\leq\epsilon$，故存在阶梯函数列 $\{\psi_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\psi_{i,k}(x)=\chi_{E_i}(x)\quad a.e.x$$

令 $\psi_k(x)=\sum_{i=1}^{N}c_i\psi_{i,k}(x)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=\varphi(x)\quad a.e.x$$

根据定理 2.1.3，可测函数可被简单函数列逐点逼近，再结合上面的推导，可以得到可测函数能几乎处处被阶梯函数列逼近，从而定理得证。 □

2.2 Lebesgue 积分

2.2.1 Lebesgue 积分的定义与收敛定理

现在我们开始以简单函数为基础，分四个阶段定义 Lebesgue 积分。(若如特别说明，以下关于函数 f 的限制均可理解为“几乎处处成立”，例如 $f(x)\leq g(x)$ 可理解为 $f(x)\leq g(x)\ a.e.x$)

Stage 1：简单函数

定义 2.2.1. 简单函数是有限和

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}(x)$$

其中 E_k 是测度有限的可测集，a_k 是常数。若 E_k 两两不交，a_k 不同且非零，则称该分解为 $\varphi(x)$ 的**标准形式**。若 φ 是具有标准形式 $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{F_k}(x)$ 的简单函数，那么定义 φ 的 *Lebesgue* 积分为

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N}c_km(F_k)$$

如此定义的 Lebesgue 积分满足线性性、可加性一系列性质，在此我们略过证明，把重心放在接下来的定义和它们引出的非常重要的收敛定理。

Stage 2：支撑在一个有限测度集上的有界函数

定义 2.2.2. 一个可测函数的支撑集定义为

$$\operatorname{supp}(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$$

只要 $x \notin E$ 就有 $f(x) = 0$，则称 f 支撑在集合 E 上。

在定义此类函数的积分之前，我们先证明一个重要引理。

引理 2.2.3 ((Egorov 定理))**.** 假设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一个定义在满足 $m(E) < \infty$ 的可测集 E 上的可测函数列，且在 E 上 f_k 几乎处处收敛于 f。对任意的 $\varepsilon > 0$，我们可以找到一个闭集 $A_\varepsilon \subset E$ 使得 $m(E \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ 且在 A_ε 上 f_k 一致收敛于 f。

证明. 不妨设对任意的 $x \in E$，$f_k(x) \to f(x)$ (这里能够不妨设是因为不收敛于 f 的点构成一个零测集)，对于任意的非负整数 n, k，令

$$E_{k,n} = \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| < 1/n, \text{对所有} j > k\}$$

现固定 n，我们有 $E_{k,n} \uparrow E$，从而根据测度的连续性，存在 k_n 使得 $m(E \setminus E_{k_n,n}) < 1/2^n$。根据构造，只要 $j > k_n$ 且 $x \in E_{k_n,n}$ 就有 $|f_j(x) - f(x)| < 1/n$。

选取 N 使得 $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$ 且令

$$\tilde{A}_\varepsilon = \bigcap_{n \geq N} E_{k_n,n}$$

我们有

$$m(E \setminus \tilde{A}_\varepsilon) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E \setminus E_{k_n,n}) < \varepsilon/2$$

对任意的 $\delta > 0$，选取 $n > N$ 使得 $1/n < \delta$，于是只要 $j > k_n$ 且 $x \in E_{k_n,n}$，就有 $|f_j(x) - f(x)| < \delta$。因此在 $\tilde{A}_\varepsilon$ 上 f_k 一致收敛于 f。

最后选取闭子集 $A_\varepsilon \subset \tilde{A}_\varepsilon$ 满足 $m(\tilde{A}_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon/2$，于是我们有

$$m(E \setminus A_\varepsilon) \leq m(E \setminus \tilde{A}_\varepsilon) + m(\tilde{A}_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

□

引理 2.2.4. 设 f 是支撑在一个有限测度集 E 上的有界函数。若 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是任意支撑在 E 上、以 M 为界的简单函数序列，且满足对 $a.e.x$, $\varphi_n(x) \to f(x)$，则

$$(1) \quad \text{极限} \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \text{ 存在}$$

$$(2) \quad \text{若} f = 0 \ a.e.x\text{，则} \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = 0$$

证明. 对任意的 $\varepsilon > 0$，因为 E 的测度有限，故由 Egorov 定理，存在 E 的一个可测闭子集 A_ε 使得 $m(E - A_\varepsilon) \le \varepsilon$，且在 A_ε 上 φ_n 一致收敛于 f。记 $I_n = \int \varphi_n$，则有

$$\begin{aligned}
|I_n - I_m| &\le \int_E |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \,\mathrm{d}x + \int_{E-A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \,\mathrm{d}x + 2M\, m(E - A_\epsilon) \\
&\le \int_{A_\epsilon} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \,\mathrm{d}x + 2M\epsilon.
\end{aligned}$$

由一致收敛性, 对所有 x 和充分大的 m, n 有 $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$, 因此对充分大的 m, n 有

$$|I_n - I_m| \le m(E)\varepsilon + 2M\varepsilon$$

这说明 $\{I_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的柯西列，从而其收敛。

若 $f = 0$ $a.e.x$，重复以上的论证可以得到对充分大的 n，有 $|I_n| \le m(E)\varepsilon + M\varepsilon$，从而 (2) 结论也成立。 □

有了这个引理我们就可以定义这类函数的 Lebesgue 积分的。

定义 2.2.5. 若 f 是支撑在一个有限测度集 E 上的有界函数，$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 是任意支撑在 E 上、以 M 为界的简单函数序列，且满足对 $a.e.x$, $\varphi_n(x) \to f(x)$，则定义 f 的 *Lebesgue* 积分为

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x) \,\mathrm{d}x$$

引理的结论 (1) 保证了如此定义的极限是存在的，而 (2) 保证了积分值和 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ 这个函数序列的选取无关，即假设 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ 也是支撑在 E 上、以 M 为界的简单函数序列，且满足对 $a.e.x$, $\varphi_n(x) \to f(x)$，则序列 $\{\varphi_n - \psi_n\}$ 支撑在一个有限测度集、以 $2M$ 为界，且 $n \to \infty$ 时，$\varphi_n - \psi_n$ 几乎处处为零。从而由 (2) 知 $\lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n - \psi_n) = 0$，从而我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \,\mathrm{d}x$$

这就证明了积分值和序列的选取无关。

根据引理的证明思路，我们可以证明第一个重要的收敛定理——有界收敛定理。

定理 2.2.6. 设 $\{f_n\}$ 是一个支撑在有限测度集 E 上、以 M 为界的可测函数列，且几乎处处收敛于 f，则 f 也是支撑在 E 上的有界可测函数，且

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x$$

证明. 该定理的实质是对引理 2.2.4 证明的重复，利用 Egorov 定理和三角不等式，我们有

$$\int (f_n(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \leq \int |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq m(E)\varepsilon + 2M\varepsilon$$

从而结论得到了证明。 □

Stage 3：非负函数

定义 2.2.7 (2.1.7). *设 f 是一可测非负函数，则定义其 Lebesgue 积分为*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_g \int g(x)\mathrm{d}x$$

这里上确界对所有满足 $0 \leq g \leq f$ 的支撑在一个有限可测集上的有界可测函数 g 取。

若上确界有限 (广义实数意义下)，则称 f 是 Lebesgue 可积的。

在有了定义之后，我们想知道是否可以像定理 2.2.6 那样交换积分和极限的顺序。然而在不加限制的情况下，我们很容易找到反例，例如考虑

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{若} 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对所有的 x 有 $f_n(x) \to 0$，然而对所有的 n 有 $\int f_n(x) = 1$。我们发现积分的极限比极限的积分大，由此受到启发，有如下的定理。

定理 2.2.8. *(法图引理) 设 $\{f_n\}$ 是非负可测函数列，且几乎处处收敛于 f，则*

$$\int f \leq \liminf \int f_n$$

证明. 假设 $0 \leq g \leq f$，其中 g 是支撑在一个有限可测集 E 上的有界可测函数。若设 $g_n(x) = \min(g(x), f_n(x))$，则 g_n 为支撑在 E 上的可测函数且几乎处处收敛于 g，从而根据有界收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g$$

由于 $g_n(x) \leq f_n(x)$，所以 $\int g_n \leq \int f_n$，进而有

$$\int g \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

最后对所有的 g 取上确界就得到了法图引理。 □

由法图引理我们可以得到如下的推论：

推论 2.2.9. *设 f 是一个非负可测函数，若非负可测函数列 $\{f_n\}$ 满足对 $a.e.x$，$f_n(x) \leq f(x)$ 且 $n \to \infty$ 时有 $f_n(x) \to f(x)$，则有*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

证明. 由于 $f_n(x) \le f(x)$ $a.e.x$，所以对所有 n 有 $\int f_n \le \int f$。取上确界有

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \le \int f$$

结合法图引理便证明的该推论。特别地，我们有 ** 单调收敛定理 **: □

定理 2.2.10. 假设 $\{f_n\}$ 是一个满足 $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$，且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $a.e.x$ 的非负函数列，则有

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

Stage 4：一般可积函数

定义 2.2.11. 若非负可测函数 $|f|$ 是可积的，则称 f 是可积的。同时我们定义

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad 与 \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

我们有 $f = f^+ - f^-$，且因为 f^+, f^- 都是非负的且它们都不大于 $|f|$，故 f^+, f^- 都是可积的。接着我们定义

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

至此完成了对 *Lebesgue* 积分的定义，接下来我们考虑积分的一些性质，除了最基本的线性性、可加性、单调性和三角不等式，还有如下常用的性质。

性质 2.2.12. 假设 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积，则对每个 $\varepsilon > 0$: *(1)* 存在有限测度集 B，使得 $\displaystyle\int_{B^c} |f| < \varepsilon$； *(2)* 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $m(E) < \delta$，就有 $\displaystyle\int_E |f| < \varepsilon$。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $f \ge 0$，否则可用 $|f|$ 代替代替 f。

对于 (1)，令 B_N 表示中心在原点、半径为 N 的球，令 $f_N(x) = f(x)\chi_{B_N}(x)$，则 $f_N \uparrow f$，于是由单调收敛定理

$$\lim_{N\to\infty} \int f_N = \int f$$

这说明对任意的 ε，存在充分大的 N 使得

$$0 \le \int f - \int f\chi_{B_N} = \int_{B_N^c} f \le \varepsilon$$

从而我们证明了 (1)。

对于 (2)，令 $f_N(x) = f(x)\chi_{E_N}(x)$，其中 $E_N = \{x : f(x) \le N\}$。我们有 $f_N \uparrow f$，于是由单调收敛定理，存在充分大的 N 使得

$$\int (f - f_N) < \varepsilon/2$$

选取 $\delta > 0$ 使得 $N\delta < \varepsilon/2$，只要 $m(E) < \delta$，就有

$$\begin{aligned}\int_E f &= \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \\ &\leq \int (f - f_N) + \int_E f_N \\ &\leq \int (f - f_N) + Nm(E) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

从而我们证明了 (2)。 □

注 2.2.13. (1) 可以直观理解为如果积分值是有限的，那么 f 在无穷远处的积分值趋于零, 而 (2) 是我们在第三章出现的非常重要的性质——绝对连续性。

有了这些铺垫，我们可以证明最后一个也是应用最广的收敛定理——**控制收敛定理**。

定理 2.2.14. 假设可测函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f, 且存在可积函数 g 使得 $|f_n(x)| \leq g(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

证明. 对每个正整数 $N > 0$，令 $E_N = \{x : |x| \leq N, g(x) \leq N\}$。对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得 $\int_{B_N^c} g \leq \varepsilon$，于是函数 $f_n \chi_{E_N}$ 有界且支撑在一个有限测度集上。根据有界收敛定理，对充分大的 n 有

$$\int_{E_N} |f_n - f| < \varepsilon$$

因此对充分大的 n 有

$$\begin{aligned}\int |f_n - f| &= \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| \\ &\leq \int_{E_N} |f_n - f| + 2\int_{E_N^c} g \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon\end{aligned}$$

从而控制收敛定理得证。 □

最后我们证明 Lebesgue 积分是兼容 Riemann 积分的。

定理 2.2.15. 若 f 在闭区间 $[a, b]$ 上是黎曼可积的，则 f 可测，且

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx$$

即两种积分的取值是相等的。

证明. 根据黎曼可积的定义，存在一致有界的可测阶梯函数列 $\{\varphi_k\}$ 和 $\{\psi_k\}$ 使得

$$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \cdots \le f(x) \le \cdots \le \psi_2(x) \le \psi_1(x)$$

且

$$\lim_{k\to\infty}(R)\int \varphi_k = (R)\int_a^b f = \lim_{k\to\infty}(R)\int \psi_k$$

根据 Lebesgue 准则，f 几乎处处连续，所以 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\psi_n(x) = f(x)\ a.e.x$，结合有界收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty}(L)\int \varphi_k = (L)\int_a^b f = \lim_{k\to\infty}(L)\int \psi_k$$

这里每个阶梯函数都是简单函数，于是由各自积分的定义可以得到对任意的 k

$$(R)\int \varphi_k = (L)\int \varphi_k, \quad (R)\int \psi_k = (L)\int \psi_k$$

结合上述结论我们即可得出

$$\text{(R)}\int_a^b f(x)dx = \text{(L)}\int_a^b f(x)dx$$

□

2.2.2 L^1 空间

当我们把注意力转向可积函数整体结构时，可以观察到全体可积函数构成一个线性空间。若在该空间上配备范数：

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx$$

则称这个赋范线性空间为 L^1 空间。

我们研究 L^1 空间是因为其弥补了黎曼可积函数空间的一个缺陷，即后者是不完备的。例如我们考虑 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $[0,1]$ 上的有理数的一个列举，令

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这里每个 f_n 都是黎曼可积的，但是其极限是限制在 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数，显然其不是黎曼可积的。

但是对 L^1 空间，我们有

定理 2.2.16. 赋范线性空间 L^1 是完备的，即 L^1 中的柯西列收敛且极限仍在 L^1 中。

证明. 考虑柯西列 $\{f_n\}$ 满足以下条件的子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$：

$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|\leq 2^{-k},\quad \forall k\geq 1$$

由柯西列的性质知这样的子列是存在的。接着考虑级数

$$f(x)=f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)),\quad g(x)=|f_{n_1}(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|$$

我们有

$$\int|f_{n_1}|+\sum_{k=1}^{\infty}\int|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\leq\int|f_{n_1}|+\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}<\infty$$

故由单调收敛定理 g 是可积的，且由于 $|f|\leq g$，由控制收敛定理 f 也可积，于是我们有 f_{n_k} 几乎处处收敛于 f。最后由于 $|f-f_{n_k}|<g$，再次利用控制收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}-f\|=\|\lim_{k\to\infty}(f_{n_k}-f)\|=0$$

从而对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N_1 使得 $m,n>N$ 时有 $\|f_m-f_n\|\leq\varepsilon/2$，同时存在 $n_k>N_1$ 且 $\|f_{n_k}-f\|\leq\varepsilon/2$。于是当 $n>N_1$ 时有

$$\|f_n-f\|\leq\ \|f_n-f_{n_k}\|+|f_{n_k}-f\|\leq\varepsilon$$

这就证明了 $\{f_n\}$ 在 L^1 中有极限 f，从而 L^1 空间是完备的。 □

注 2.2.17. 这里的证明思路和证明 $\mathbb{R}$ 的完备性类似，都是先证明存在一个收敛的子列再分段放缩。值得注意的是，本题有另一个比较自然的证明思路，即先证明了 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于某个 f，再证明其也依范数收敛于 f，然而遗憾的是我们可以找到一个反例，使得 f_n 在每一点的极限都不存在。这也提醒我们几乎处处收敛和依 L^1 范数收敛并不等价，二者都不能推出对方。

L^1 收敛但处处不收敛：对任意的正整数 k，若 $2^{k-1}\leq n\leq 2^k-1$，则令

$$E_n=[\frac{n-2^{k-1}}{2^{k-1}},\frac{n-2^{k-1}+1}{2^{k-1}}]$$

考虑 $f_n=\chi_{E_n}$，容易验证当 $2^{k-1}\leq n\leq 2^k-1$ 时有 $\|f_n\|=1/2^{k-1}$，所以 f_n 在 L^1 范数下收敛于 $f\equiv 0$。然而对每个 $x\in[0,1]$，x 属于无穷多个 E_n，也不属于无穷多个 E_n，从而对每个 x，$f_n(x)$ 都不会收敛于 $f(x)$。

处处收敛但 L^1 不收敛：这个例子在上一篇证明法图引理前就已经提及，考虑

$$f_n=n\cdot\chi_{(0,1/n)}$$

则 f_n 逐点收敛于 $f\equiv 0$，然而对每个 n，$\|f_n\|=1$，这说明 f_n 依范数并不会收敛于 f。

定义 2.2.18. 对于可积函数簇 G，若对任何 $f\in L^1$ 和 $\varepsilon>0$，都存在 $g\in G$ 使得 $\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$，则称 G 在 L^1 中**稠密**。

根据数学分析的知识和先前的笔记，我们容易推导出简单函数、阶梯函数、紧支撑的连续函数都在 L^1 中稠密，从而在解决许多实分析相关的问题时，我们可以先在其稠密子集上证明结论，再逼近整个空间，这也是分析学中的一个核心思想。

2.3 Fubini 定理

2.3.1 Fubini 定理的叙述与证明

在数学分析中，我们常常把多重积分的计算转化为累次的一维积分计算，现在我们以 Lebesgue 积分的视角检验这个方法的严谨性，即 Fubini 定理。

定义 2.3.1. *考虑映射 $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$，对固定的 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$，我们定义*

$$f^y(x)=f(x,y)$$

为 f 在 y 上的截面。对偶地，对固定的 $x\in\mathbb{R}^{d_1}$，也可以定义 $f_x(y)=f(x,y)$ 为 f 在 x 上的截面。

令 $d=d_1+d_2$，我们发现上述定义的映射和 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是同一个映射，只是前者强调了一种可行的分解。

对于 $E\subset\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$，我们定义截面为:

$$E^y=\left\{x\in\mathbb{R}^{d_1}:(x,y)\in E\right\},\quad E_x=\left\{y\in\mathbb{R}^{d_2}:(x,y)\in E\right\}$$

需要注意的是，f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测并不能保证每个截面 f^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可测，例如将一个 $\mathbb{R}$ 上的不可测集 $\mathcal{N}$ 放到 $\mathbb{R}^2$ 的 x 轴上，其在 $\mathbb{R}^2$ 上的测度为零，自然是可测集。但是对 $y=0$，$f^y=\mathcal{N}$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可测。不过幸运的是，对几乎所有的 y，截面 f^y 是可测的。这也是接下来介绍的 Fubini 定理中的一部分。

定理 2.3.2. *假设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 上可积，则对几乎每个 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$，(1) 截面 f^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积；(2) 由 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$ 定义的函数在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上可积，且*

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\right)dy=\int_{\mathbb{R}^d} f.$$

证明. 不妨设 f 是实值的，令 $\mathcal{F}$ 表示的 $\mathbb{R}^d$ 上的满足定理中两个结论的函数集合，我们按照以下步骤证明 $L^1(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{F}$：

step 1 $\mathcal{F}$ 在线性组合的运算下封闭

step 2 $\mathcal{F}$ 在极限运算下封闭

step 3 任何以有限测度的G_δ 集为特征的特征函数属于$\mathcal{F}$

step 4 任何以零测集为特征的特征函数属于$\mathcal{F}$

step 5 任何以有限测度集E 为特征的特征函数属于$\mathcal{F}$

step 6 任何可积函数f 属于$\mathcal{F}$.

这里 step 1,5,6 都是容易证明的。1 只需要利用积分的可加性；5 只需要观察到任何一个有限测度集可以拆分成一个 G_δ 集和一个零测集的不交并；6 可以把 f 分解成 f^+ 和 f^-，它们分别是某个简单函数列的极限，而简单函数是以有限测度集 E 为特征的特征函数的线性组合。下面我们证明剩下三个步骤。

对于 step 2，假设 $\{f_k\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的可测函数列，我们不妨设 f_k 非负且 $f_k \uparrow f$，由单调收敛定理得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dxdy$$

由假设，对每个 k 存在零测集 $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$，使得只要 $y \notin A_k$，就有 f_k^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积。令 $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$，则 $m(A)=0$，且只要 $y \notin A$，那么对所有的 k , f_k^y 都在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积。记

$$g_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\,dx, \quad g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$$

则由单调收敛定理 $g_k \uparrow g$。根据假设每个 g_k 都是可积的，从而再次利用单调收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy$$

由于 $f_k \in \mathcal{F}$，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dxdy$$

结合以上式子我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dxdy$$

由于 f 可积，我们有 g 也是可积的，从而 $g(y) < \infty$, $a.e.y$。这说明对 $a.e.y$，f^y 可积，且

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,dxdy$$

这就证明了 $f \in \mathcal{F}$。

结合 step 1 和 step 2，我们可以证明在可积的前提下 $\mathcal{F}$ 对可数次线性组合的运算也是封闭的。

对于 step 3，先考虑 E 是 $\mathbb{R}^d$ 上的有界开矩形的情形。记 $E = Q_1 \times Q_2$，其中 Q_1 和 Q_2 分别是 $\mathbb{R}^{d_1}$ 和 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上的开矩形。对每个 y , 函数 $\chi_E(x,y)$ 关于 x 都是可积的，且关于 y 的函数

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)\,dx = \begin{cases} |Q_1| & y \in Q_2, \\ 0 & \text{其他} \end{cases} = |Q_1|\chi_{Q_2}(y)$$

在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上也是可积的。又因为

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} |Q_1|\chi_{Q_2}(y)\,dy = |Q_1||Q_2| = |E| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x,y)\,dx\,dy$$

所以 $\chi_E \in \mathcal{F}$。

注意到刚刚的证明对闭矩形也成立，利用 $\mathcal{F}$ 的封闭性，可以得出若 E 是某个闭矩形边界的子集，$\chi_E \in \mathcal{F}$。

接着由于任何一个有限开集可以写成几乎不相交的闭矩形的可数并，任何一个有限测度的 G_δ 集是开集的可数交，可以得出任何以有限测度的 G_δ 集为特征的特征函数属于 $\mathcal{F}$。

对于 step 4，假设 E 是零测集，则存在一个测度为零的 G_δ 集 G 使得 $E \subset G$，根据 step 3 的证明过程，我们有对 $a.e.y$，截面 G^y 的测度为零。又因为 $E^y \subset G^y$，所以对 $a.e.y$，E^y 的测度也为零，从而对 $a.e.y$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)\,dx = 0$$

进而

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)\,dx \Big)\,dy = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E$$

这说明 $\chi \in \mathcal{F}$。

综上所述，Fubini 定理得证。 □

注 2.3.3. 私以为 Fubini 定理的证明是非常具有记录意义的，一是因为其提供了一种实分析常用的从特殊到一般、从简单函数推广到复杂函数的证明范式，即**单调类定理**；二是因为在证明的过程中，用到了非常多的先前测度论和收敛定理的相关结论，对于像本人一样初学者而言，提供了非常好的回顾前面所学知识的机会。

2.3.2 Fubini 定理的应用

根据 Fubini 定理的证明，我们有一个类似的版本——Tonelli 定理。

定理 2.3.4. *假设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 上的***非负可测函数***，则对几乎每个 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$: (1) 截面 f^y 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上***可测***；(2) 由 $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$ 定义的函数在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上***可测***，且*

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

需要注意的是 Tonelli 定义强调的是截面可测，因此限制条件只需要 f 是非负可测函数即可。在这种情形下 f 和其截面不一定可积 (或者说积分值为无穷)，从而 (2) 中的积分应当在扩充值的意义下理解。

这两个定理告诉我们在什么情形下可以放心地去交换积分的次序——**非负或者绝对可积**，对于级数也是适用的。

此外我们考虑一个积分次序不可交换的反例：令

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \quad 0 \le x, y \le 1$$

先对 x 积分再对 y 积分结果是 $1/2$，反之则是 $-1/2$，同时 $|f|$ 的积分为正无穷。这也从反面印证了非负或者绝对可积的条件是必要的。

利用这两个定理我们可以得到一些和集合测度相关的定理。

定理 2.3.5. 若 E 是 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 上的一个可测集，则对几乎每个 $y\in\mathbb{R}^{d_2}$，截面 E^y 是 $\mathbb{R}^{d_1}$ 的一个可测子集，进而 $m(E^y)$ 是关于 y 的可测函数，且

$$m(E)=\int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y)\,dy$$

对 χ_E 应用 *Tonelli* 定理即可得到该定理的证明。此外对偶地，结论对 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上的截面 E_x 也成立。

定理 2.3.6. 若 $E=E_1\times E_2$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个可测集，且 $m_*(E_2)>0$，则 E_1 可测。

定理 2.3.7. 假设 E_1 和 E_2 分别是 $\mathbb{R}^{d_1}$ 和 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上的可测集，则 $E=E_1\times E_2$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测集，且

$$m(E)=m(E_1)m(E_2)$$

定理 2.3.8. 假设 f 是 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上的可测函数，则由 $\tilde{f}(x,y)=f(x)$ 定义的函数 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ 上可测。

我们略过这三个定理的证明，把注意力转向积分的一个“几何意义”，即 $\displaystyle\int f$ 可以理解为 f 下方图像的“面积”，我们用严谨的语言叙述这个结论。

定理 2.3.9. 假设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的非负函数，且令

$$\mathcal{A}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le y\le f(x)\big\}$$

则 *(1)* f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测当且仅当 $\mathcal{A}$ 在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上可测；*(2)* 在 *(1)* 的前提下

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx=m(\mathcal{A}).$$

证明. 若 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测，则由定理 2.3.8，$F(x,y)=y-f(x)$ 可测，从而

$$\mathcal{A}=\{y\ge 0\}\cap\{F\le 0\}$$

在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上可测。

反过来假设 $\mathcal{A}$ 可测，则对每个 $x\in\mathbb{R}^{d_1}$，截面 $\mathcal{A}_x=[0,f(x)]$ 是一条闭线段，故 $f(x)=m(\mathcal{A}_x)$。再根据定理 2.3.5，f 是可测的，且

$$m(\mathcal{A})=\int\chi_{\mathcal{A}}(x,y)\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^{d_1}} m(\mathcal{A}_x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x)\,dx,$$

从而定理得证。 □

最后我们以一道具体的计算作为本篇的结尾——推导 $\mathbb{R}^d$ 上的单位球的测度。

考虑 d 维单位球

$$B^d=\{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d:x_1^2+\cdots+x_d^2\le 1\}$$

记其测度为 v_d。对固定的 $x_d \in [-1,1]$，剩下的坐标满足 $x_1^2+\cdots+x_{d-1}^2 \le 1-h^2$，这是一个半径为 $\sqrt{1-h^2}$ 的 $d-1$ 维单位球。由 Fubini 定理，我们有

$$v_d = \int_{-1}^{1}\left(\int_{x_1^2+\cdots+x_{d-1}^2\le 1-h^2} dx_1\ldots dx_{d-1}\right)dh = \int_{-1}^{1} v_{d-1}(1-h^2)^{\frac{d-1}{2}}\,dh$$

从而得到递推关系

$$v_d = 2v_{d-1}\int_0^1 (1-h^2)^{\frac{d-1}{2}}\,dh$$

令 $h=\sin\theta, dh=\cos\theta\,d\theta$，则有

$$v_d = 2v_{d-1}\int_0^{\pi/2}(\cos^2\theta)^{\frac{d-1}{2}}\cos\theta\,d\theta = 2v_{d-1}\int_0^{\pi/2}\cos^d\theta\,d\theta$$

右边是一个经典的 Wallis 积分，我们有

$$2\int_0^{\pi/2}\cos^d\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}$$

从而得到递推关系

$$v_d = v_{d-1}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

再结合初始条件 $v_1=2$，最终得到

$$v_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

第三章　微分理论

3.1　微分与积分

3.1.1　极大函数与弱型估计

本章内容我们研究 Lebesgue 积分与微分的关系。对于一维的 Riemann 积分，我们有如下的微积分基本定理：

假设 f 连续且在 $[a,b]$ 上可积，记 $F(x)=\int_a^x f(y)dy$ ，则有 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$ 以及 $\int_a^b f(y)dy = F(b)-F(a)$ 。

现在我们考虑将其推广到 n 维的 Lebesgue 积分，先考虑一维情形下定义的原函数 $F(x)$ 是否（几乎处处）存在。回顾导数的定义

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

注意到其可写成如下的形式

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy$$

将其推广到 n 维上的情形，我们可以用包含 x 的闭球 B 代替区间 I ，用 $m(B)$ 代替 $|I|$ 。从而我们最终考虑假设 f 在 R^d 可积，那么是否对几乎所有的 x ，极限

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy$$

存在且等于 $f(x)$?

当 f 在 x 处连续时，沿用一元微积分基本定理的证法，容易证明极限确实收敛到 $f(x)$ 。那么如果 f 仅仅是勒贝格可积时，是否对几乎所有的 x 上述结论成立?

答案是肯定的，接下来我们在完成一些准备工作后证明该定理。

定义 3.1.1. *若 f 在 R^d 上可积，则定义其极大函数为*

$$f^*(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\,dy$$

定理 3.1.2. *$f^*(x)$ 有如下的性质*

1. $f^*(x)$ 可测。

2. $f^*(x) < \infty$ 几乎处处成立。

3. 对所有的 $\alpha > 0$ ，有

$$m(\{x \in R^d : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{3^d}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

这里的 (3) 就是我们所说的弱型估计，直观来说，就是 $f^*(x)$ 总体不会比 f 大很多（可被一个常数倍数控制），我们将在下面证明这一结论。此外结论 (1) 是容易观察的，因为若 $f(\bar{x}) > \alpha$ ，则存在球 $B = B(\bar{x}, r)$ 使得

$$\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\,dy > \alpha$$

从而对所有的 $x \in B$ ，都有 $f^*(x) > \alpha$ ，这说明 $\{f^* > \alpha\}$ 是开集，从而 f 可测。

为证明 (3)，我们需要如下的 Vitali 覆盖引理：

引理 3.1.3. 设 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots B_N\}$ 是 R^d 中的有限开球簇，则存在 $\mathcal{B}$ 的不相交子簇 $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ 满足

$$m(\bigcup_{l=1}^{N} B_l) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j})$$

证明. 我们利用贪心算法构造满足条件的一列子簇，这依赖于一个简单但精妙的观察：假设 B 和 $\tilde{B}$ 是一对同心球，且 $\tilde{B}$ 的半径是前者的三倍，则对任意与 B 相交且半径不大于 B 的球 B' ，都有 $B' \subset \tilde{B}$ 。

接下来我们开始构造，首先在 $\mathcal{B}$ 中挑出具有极大半径的球 B_{i_1} ，去掉所有和 B_{i_1} 相交的球，由前面的观察知，这些去掉的球都会被和 B_{i_1} 球心相同且半径是 B_{i_1} 三倍的球 $\tilde{B_{i_1}}$ 覆盖。记剩下的球为 $\mathcal{B}'$ ，重复刚刚的步骤，由于每次至少选出一个球且 $\mathcal{B}$ 是有限集，操作在有限步结束。记选出来的球为 $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ ，记 $\tilde{B_{i_1}}, \tilde{B_{i_2}}, \dots, \tilde{B_{i_k}}$ 为对应球半径三倍的同心球，则 $\tilde{B_{i_1}}, \tilde{B_{i_2}}, \dots, \tilde{B_{i_k}}$ 覆盖了 $\mathcal{B}$ 中所有球。从而我们有

$$m(\bigcup_{l=1}^{N} B_l) \leq m(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B_{i_j}}) = \sum_{j=1}^{k} m(\tilde{B_{i_j}}) = 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j})$$

□

回到 (3) 的证明，令 $E_\alpha = \{f^* > \alpha\}$ ，则对于每个 $x \in E_\alpha$ ，存在包含于 x 的球 B_x 使得

$$\frac{1}{m(B_x)}\int_{B_x} |f(y)|\,dy > \alpha$$

对 E_α 的任意紧子集 K ，由于 K 被 $\bigcup_{x \in E_\alpha} B_x$ 覆盖，所以其有一个有限子覆盖 $\bigcup_{l=1}^{N} B_l \supset K$ 。由引理，存在不相交子簇 $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}$ 满足

$$m(\bigcup_{l=1}^{N} B_l) \leq 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j})$$

于是我们有

$$\begin{aligned} m(K) &\le m\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \le 3^d \sum_{j=1}^{k} m(B_{i_j}) \\ &\le \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{i_j}} |f(y)|\,dy \\ &= \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}} |f(y)|\,dy \\ &\le \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,dy. \end{aligned}$$

由于紧子集 K 选取的任意性，我们得到该不等式对 E_α 也成立，这就证明了 (3)。

此外 (2) 是 (3) 的一个简单推论，只需注意到 $\{f^* = +\infty\} \subset \{f^* > \alpha\}$ 再令 $\alpha \to \infty$ 即可。

3.1.2 勒贝格微分定理

我们再回顾之前的 L^1 理论中的 Chebyshev 不等式：假设非负函数 $f \in L^1$ ，对任意的 $\alpha > 0$ ，我们有

$$m(\{x : f(x) > \alpha\}) \le \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^1}$$

证明. 考虑

$$g(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in \{x : f(x) > \alpha\} \\ f(x), & \text{其他} \end{cases}$$

我们有 $g(x)$ 非负且 $g(x) \le f(x)$ ，从而根据控制收敛定理 g 可积且

$$\alpha m(\{x : f(x) > \alpha\}) \le \|g\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}$$

这就证明了 Chebyshev 不等式。 □

有了上述两个不等式，我们可以开始证明勒贝格微分定理。

定理 3.1.4. *若 f 在 R^d 上可积，则对于 $a.e.x$ 有*

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,dy = f(x)$$

证明. 我们只需证明对每个 $\alpha > 0$ ，集合

$$E_\alpha = \left\{ x : \limsup_{\substack{m(B)\to 0 \\ x \in B}} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\,dy - f(x) \right| > 2\alpha \right\}$$

的测度为零。

对于任意的 ε ，存在紧支撑的连续函数 g 使得 $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ 。

我们可以将差 $\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy - f(x)$ 写成

$$\frac{1}{m(B)}\int_B (f(y)-g(y))\,dy + \frac{1}{m(B)}\int_B g(y)\,dy - g(x) + g(x) - f(x)$$

由于 $g(x)$ 连续，故有

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B g(y)\,dy = g(x)$$

从而

$$\limsup_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy - f(x)\right| \le (f-g)^*(x) + |g(x)-f(x)|$$

我们记 $F_\alpha = \{x : (f-g)^*(x) > \alpha\}$ 和 $G_\alpha = \{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\}$ ，则 $E_\alpha \subset (F_\alpha \cup G_\alpha)$ 。

一方面由 Chebyshev 不等式，有

$$m(G_\alpha) \le \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{L^1}$$

另一方面由弱型估计

$$m(F_\alpha) \le \frac{3^d}{\alpha}\|f-g\|_{L^1}$$

从而

$$m(E_\alpha) \le m(F_\alpha) + m(G_\alpha) \le \frac{3^d}{\alpha}\varepsilon + \frac{1}{\alpha}\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $m(E_\alpha) = 0$ ，从而定理得证! □

我们注意到微分是一个局部性质而可积是一个整体性质，即 f 在无穷远处的行为不会影响微分定理，从而可以考虑减弱 f 的限制，用一个局部性质替代可积。

定义 3.1.5. 称一个 R^d 上的可测函数 f 是局部可积的，如果对每个球 $B \subset R^d$ ，函数 $f(x)\chi_B$ 可积。我们称所有局部可积的函数所组成的空间记为 $L^1_{loc}(R^d)$ 。

显然若 f 是局部可积的，勒贝格微分定理也成立。

3.2 有界变差函数和绝对连续函数

我们将注意力转向第二个问题，即一元函数 $F(x)$ 在什么条件下，等式

$$F(a) - F(b) = \int_a^b F'(x)\,dx$$

成立。这里需要注意的是由于该等式是在勒贝格积分的意义下，故 $F'(x)$ 需要几乎处处可导。然而即使 $F(x)$ 满足这一点，也不能保证上述等式成立，我们将在后面看到这一点。

3.2.1 有界变差函数

定义 3.2.1. 假设 $F(t)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的复值函数，记 $a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b$ 是该区间的一个分割 T 。F 在这个分割下的变差定义为

$$\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|$$

若存在 $M<\infty$ 使得

$$\sup_T\sum_{j=1}^{N_T}|F(t_j)-F(t_{j-1})|=M$$

则称 F 在 $[a,b]$ 上是有界变差的。

有界变差函数的一个重要性质是其可以写成两个有界递增函数之差，为证明之，我们先定义如下概念：

定义 3.2.2. 若定义在 $[a,b]$ 上的 F 是有界变差函数，定义其在 $[a,x]$ 上的全变差为

$$T_F(a,x)=\sup\sum_{j=1}^{N}|F(t_j)-F(t_{j-1})|$$

这里的上确界对 $[a,x]$ 的所有分割取。

若 F 是实值的，我们还可以定义其在 $[a,x]$ 上的正变差

$$P_F(a,x)=\sup\sum_{(+)}(F(t_j)-F(t_{j-1}))$$

这里的求和对所有使得 $F(t_j)\geq F(t_{j-1})$ 的 j 取。

同理也可以定义 F 在 $[a,x]$ 上的负变差

$$N_F(a,x)=\sup\sum_{(-)}-(F(t_j)-F(t_{j-1}))$$

这里的求和对所有使得 $F(t_j)\leq F(t_{j-1})$ 的 j 取。

容易看出对所有的 $a\leq x\leq b$ 有

$$F(x)-F(a)=P_F(a,x)-N_F(a,x)$$

且

$$T_F(a,x)=P_F(a,x)+N_F(a,x)$$

现在我们证明

定理 3.2.3. $[a,b]$ 上的实值函数 F 是有界变差函数当且仅当其可以写成两个有界递增函数的差。

证明. 充分性是显然的，现假设 F 是有界变差函数，令 $F_1(x) = P_F(a,x) + F(a)$ 和 $F_2(x) = N_F(a,x)$ ，显然 F_1 和 F_2 都是递增的且都为有界变差，故由上面正、负变差的性质知 $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ ，定理得证。 □

我们接下来着手证明单调函数的导数几乎处处存在，从而得出有界变差函数的导数也是处处存在的。

我们先证明一个十分重要的引理，这是先前证明的 Vitali 覆盖引理 (引理 3.1.3) 的加强版。

引理 3.2.4. 假设 $E \subset R^d$ 是一个有限测度集，且 $\mathcal{B}$ 是一个 *Vitali* 覆盖（即对于每个 $x \in E$ 和任意的 $\eta > 0$ ，存在球 $B \in \mathcal{B}$ ，使得 $x \in B$ 且 $m(B) < \eta$)，则对任意的 $\delta > 0$ ，我们可以选取 $\mathcal{B}$ 中有限个不相交的球 $B_1, B_2, \ldots B_N$ ，使得

$$\sum_{i=1}^{N} m(B_i) \geq m(E) - \delta$$

证明. 不妨设 $\delta < m(E)$ ，我们可以选择 E 的一个紧子集 E' 使得 $m(E') \geq \delta$ ，引理 3.1.3 保证了可以选取 $\mathcal{B}$ 中不相交的球 $B_1, B_2, \ldots B_{N_1}$ 使得（为方便我们记 $\gamma = 3^{-d}$ ）

$$\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq \gamma m(E') \geq \gamma\delta$$

若 $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) \geq m(E) - \delta$ ，则已经完成了证明，操作终止；若 $\sum_{i=1}^{N_1} m(B_i) < m(E) - \delta$ ，令 $E_2 = E - \bigcup_{i=1}^{N_1} \bar{B}_i$ ，则 $m(E_2) > \delta$ ，且 $\mathcal{B}$ 中和 $\bigcup_{i=1}^{N_1} \bar{B}_i$ 不相交的球构成了 E_2 的一个 Vitali 覆盖，从而我们可以选取 E_2 的紧子集 E_2' 满足 $m(E_2') \geq \delta$ 和 $B_{N+1}, B_{N+2}, \ldots B_{N_2}$ ，使得

$$\sum_{i=N_1+1}^{N_2} m(B_i) \geq \gamma m(E_2') \geq \gamma\delta$$

且 $B_1, B_2, \ldots, B_{N_2}$ 两两不交。

反复进行上述操作，若正整数 $k \geq (m(E) - \delta)/(\gamma\delta)$ ，假设在 k 次操作后还没终止，则选取的球的测度之和大于 $k\gamma\delta$ ，这说明上述操作至多在 k 步之内结束，此时我们选出了有限个不相交的球满足条件，引理得证！ □

接下来我们证明

定理 3.2.5. 若 F 是定义在 $[a,b]$ 上的单调递增函数，则 F 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导。

证明. 我们定义如下四个导数

$$D^+F(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad D_+F(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

以及

$$D^-F(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{F(x-h) - F(x)}{-h}, \quad D_-F(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{F(x-h) - F(x)}{-h}$$

F 在 x 处可导当且仅当这四个值相等且有限，显然有 $D_+ \le D^+$, $D_- \le D^-$ ，从而我们只需证明对 $a.e.x$ 有 $D^+F(x) < \infty$ 和 $D^+F(x) < D_-F(x)$ 。我们考虑

$$E = \{x \in (a,b) : D^+F(x) > D_-F(x)\}$$

由于有理数是稠密的，我们可以将 E 表示为

$$E = \bigcup_{u,v\in\mathbb{Q},u>v} E_{u,v}, \quad \text{其中} E_{u,v} = \{x \in E : D^+F(x) > u > v > D_-F(x)\}$$

我们证明对固定的 $u > v$ 有 $m(E_{u,v}) = 0$ ，记 $s = m(E_{u,v})$ ，对应任意的 ε ，存在 $O \supset E_{u,v}$ 且 $m(O) < s + \varepsilon$ 。对每个 $x \in O$ ，存在任意小的区间 $[x-h, x] \subset O$ ，使得

$$F(x) - F(x-h) < vh$$

根据引理 3.2.4 ，我们可以选出有限个互不相交的闭区间 $\{I_n = [x_n - h_n, x_n]\}_{n=1}^N$ ，使得

$$\sum_{n=1}^N m(I_n) > s - \epsilon$$

于是我们有

$$\sum_{n=1}^N [F(x_n) - F(x_n - h_n)] < v\sum_{n=1}^N h_n < v(s+\epsilon)$$

再令 $A = E_{u,v} \cap (\bigcup \text{int } I_n)$ ，则 $m(A) > s - \varepsilon$ 。对于任意的 $y \in A$ ，存在某个 I_n 和区间 $[y, y+k] \subset I_n$ ，使得

$$F(y+k) - F(y) > uk$$

再次利用引理 3.2.4 ，我们可以选出有限个互不相交的闭区间 $\{J_m = [y_m, y_m + k_m]\}_{m=1}^M$ 使得

$$\sum_{m=1}^M m(J_m) > s - 2\epsilon$$

从而我们有

$$\sum_{m=1}^M [F(y_m + k_m) - F(y_m)] > u\sum_{m=1}^M k_m > u(s-\epsilon)$$

由于 F 是单调递增的且每个 J_m 都被包含在某个 I_n 中，结合 $\{J_m\}, \{I_n\}$ 分别两两不交，从而有

$$\sum_{m=1}^M [F(y_m + k_m) - F(y_m)] \le \sum_{n=1}^N [F(x_n) - F(x_n - h_n)]$$

从而

$$u(s - 2\epsilon) < v(s+\epsilon)$$

再令 $\varepsilon \to 0$ ，我们有 $us \le vs$ ，最后由于 $u > v$ ，所以 $s = 0$ ，即 $E_{u,v}$ 是零测集。因为 E 是可数个这样的零测集的并，所以 E 也是零测集，进而 F 的四个导数值几乎处处相等。

接下来我们证明导数几乎处处有限，我们记

$$g(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

和

$$g_n(x)=n[F(x+\frac{1}{n})-F(x)]$$

（约定 $F(x)=F(b)$ ，当 $x>b$ ），则 $g_n(x)\to g(x)$ ，根据 Fatou 引理有

$$\int_a^b g(x)dx\le\liminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx$$

又因为

$$\int_a^b g_n(x)dx=n\int_b^{b+1/n}F(x)dx-n\int_a^{a+1/n}F(x)dx=F(b)-n\int_a^{a+1/n}F(x)dx\le F(b)-F(a)$$

于是

$$\int_a^b g(x)\,dx\le F(b)-F(a)$$

这说明 $g(x)$ 几乎处处有限，即 $F'(x)$ 几乎处处存在，综上定理得证。 □

注 3.2.6. 我们证明了单调递增函数几乎处处可导，从而有界变差函数 F 也几乎处处可导，且

$$\int_a^b F'(x)\,dx\le F(b)-F(a)$$

这离我们想要的 $\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)$ 还差一些，然而有界变差函数不能保证这一点。事实上我们可以基于 Cantor 集构造一个定义在 $[0,1]$ 上的单调递增函数 F 满足 $F(0)=0,F(1)=1$ 且 $F'(x)=0,\ a.e.x$ （这里我们就不具体构造这个反例了，有兴趣了解的可自行搜索“康托尔-勒贝格函数”）。

3.2.2 绝对连续函数

从上面的讨论我们发现仅仅是有界变差的条件不足以使得微积分基本定理成立，我们需要再次加强 F 的性质。

定义 3.2.7. 设函数 F 定义在 $[a,b]$ 上，若对任意的 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ 使得对任意有限个开区间 $(a_k,b_k),k=1,2,\dots,N$ ，只要 $\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\delta$ ，就有

$$\sum_{k=1}^N|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$$

则称 F 在 $[a,b]$ 上是绝对连续的。

容易观察到绝对连续是比有界变差和一致连续更强的性质，同时比 Lipschitz 连续弱。

若 f 可积且 $F(x)=\int_a^x f(y)\,dy$ ，则 $F(x)$ 是绝对连续的（上一章的积分收敛定理中我们已经提及），这表明使得

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

成立的一个必要条件是 $F(x)$ 绝对连续，我们接下来证明这也是充分条件，即：

定理 3.2.8. *若 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续，则*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

证明. 令 $G(x)=\int_a^x F'(y)\,dy$ ，则 G 绝对连续，因此差 $F(x)-G(x)$ 也是绝对连续的，由勒贝格微分定理对 $a.e.x$ 有 $F'(x)=G'(x)$ ，即 $F(x)-G(x)$ 的导数几乎处处为零，记 $H(x)=F(x)-G(x)$ ，接下来我们只需证明 H 在 $[a,b]$ 上为常函数即可。记

$$E=\{x\in(a,b):H'(x)=0\}$$

则 $m(E)=b-a$ ，对于任意的 $\varepsilon>0$ 和 $\eta>0$ ，存在一个包含 x 的开区间 $(a_x,b_x)\subset[a,b]$ ，满足

$$|H(b_x)-H(a_x)|\le\varepsilon(b_x-a_x)\text{ 且 }b_x-a_x\le\eta$$

这些区间构成了 E 的 Vitali 覆盖，从而由引理 3.2.4，对于任意的 $\delta>0$ ，我们可以从中选取有限个开区间 $I_i, 1\le i\le N, I_i=(a_i,b_i)\subset[a,b]$ ，它们不相交且

$$\sum_{i=1}^N m(I_i)\ge m(E)-\delta=b-a-\delta$$

从而我们有

$$\sum_{i=1}^N |H(b_i)-H(a_i)|\le\sum_{i=1}^N\varepsilon(b_i-a_i)\le\varepsilon(b-a)$$

另一方面考虑 $[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^N I_i$ ，其为有限多个闭区间 $[\alpha_k,\beta_k], k=1,2,\dots,M$ 组成，且这些区间的长度之和不超过 δ ，从而由 δ 的任意性和 H 的绝对连续性知

$$\sum_{k=1}^M |H(\beta_k)-H(\alpha_k)|\le\varepsilon$$

从而

$$|H(b)-H(a)|\le\sum_{i=1}^N|H(b_i)-H(a_i)|+\sum_{k=1}^M|H(\beta_k)-H(\alpha_k)|\le\varepsilon(b-a)+\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $H(b)=H(a)$ 。对任意的 $x\in(a,b)$ ，我们只需在区间 $[a,x]$ 上重复上述的论证即得到 $H(x)=H(a)$ ，这说明 H 在 $[a,b]$ 上是常函数，故

$$F(x)=\int_a^x F'(y)\,dy\,+C$$

令 $x=a$ 可得 $C=F(a)$ ，再令 $x=b$ ，有

$$\int_a^b F'(y)\,dy=F(b)-F(a)$$

综上我们证明了

$$\int_a^b F'(y)\,dy=F(b)-F(a)$$

成立当且仅当 F 绝对连续。 □

第四章　L^2 空间与希尔伯特空间理论

4.1　L^2 空间

定义 4.1.1. 我们记 R^d 上的所有**平方可积**函数构成的集合为 $L^2(R^d)$ ，其由所有满足

$$\int_{R^d} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

的**复值**可测函数 f 组成。

相应地，f 的范数定义为

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{R^d} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

类似 L^1 空间完备性的证明，我们可以证明 L^2 空间也是完备的，这里不再重复。

L^2 空间性质优美在于其蕴含着内积结构，我们可以很自然地赋予如下的内积：对 $f, g \in L^2$ ，我们定义

$$(f, g) = \int_{R^d} f(x)\overline{g(x)} \, dx$$

这里的内积可以看作线性空间 R^n 上我们熟悉的内积的推广。基于线性代数的视角，L^2 空间有如下性质：

性质 4.1.2. L^2 空间是一个无穷维线性空间，且

1. 若 $f, g \in L^2$ ，则 $f(x)\overline{g(x)}$ 可积（这里保证了内积是良定义的），且有 *Cauchy–Schwarz* 不等式
$$|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$$
2. 内积 (f, g) 关于 f 是线性的，关于 g 是共轭线性的，即
$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g), \quad (f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2), \quad (kf, lg) = k\bar{l}(f, g)$$
3. $(f, g) = \overline{(g, f)}$。
4. 三角不等式 $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ 成立。

这些也都是容易证明的结论，在不涉及基、维数、极限等相关的问题时，我们几乎可以照搬有限维线性空间 R^n 上的结论。

关于内积引出的正交性等性质，我们将在更一般的 Hilbert 空间中去讨论。

4.2 希尔伯特空间

4.2.1 介绍

定义 4.2.1. 一个集合 $\mathcal{H}$ 若满足：

1. $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。
2. $\mathcal{H}$ 可被赋予内积 $(\cdot,\cdot)$ ，这是一个 $\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 的映射，且
   - 正定性：对任意的 $f\in\mathcal{H}$ ，都有 $(f,f)\geq 0$。
   - 共轭对称性：$(f,g)=\overline{(g,f)}$。
   - 线性性：对固定的 $g\in\mathcal{H}$ ，映射 $f\to(f,g)$ 是线性的。
3. 对 $f\in\mathcal{H}$ ，定义其范数为 $\|f\|=(f,f)^{1/2}$ ，则 $\|f\|=0$ 当且仅当 $f=0$。
4. 在度量 $d(f,g)=\|f-g\|$ 下，$\mathcal{H}$ 是完备的。

则称 $\mathcal{H}$ 为一个希尔伯特 (*Hilbert*) 空间。

一般而言我们会再给希尔伯特空间加上一个条件——可分性：存在 $\mathcal{H}$ 中的可数元素簇 $\{f_k\}$ ，使得它们的有限线性组合在 $\mathcal{H}$ 中稠密。本篇接下来出现的希尔伯特空间，在没有特别说明的情况下，都默认是可分的。

4.2.2 正交性

正交性是希尔伯特空间独有的优美性质，可以与几何、代数产生丰富而深刻的联系。在可分性的条件下，我们可以很自然地将有限维线性空间中的规范正交基的概念和性质推广到 $\mathcal{H}$ 上。

若 $\mathcal{H}$ 中两个元素 f,g 满足 $(f,g)=0$ ，则称 f,g 正交，记为 $f\perp g$ 。对此我们有勾股定理，即若 f,g 正交，那么 $\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$ 。证明这一点只需要注意到内积的性质：

$$\|f+g\|^2=(f+g,f+g)=(f,f)+(f,g)+(g,f)+(g,g)=\|f\|^2+\|g\|^2.$$

若 $\mathcal{H}$ 上的可数元素簇 $\{e_n\}$ 满足

$$(e_k,e_\ell)=\begin{cases}1, & k=\ell\\ 0, & k\neq\ell\end{cases}$$

则称 $\{e_n\}$ 是规范正交的。进一步地，若 $\{e_n\}$ 的有限线性组合在 $\mathcal{H}$ 中稠密，则称 $\{e_n\}$ 是一组规范正交基。可以看出这是有限维线性空间上的正交向量组在 $\mathcal{H}$ 上的推广。

定理 4.2.2. 若 $\{e_n\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中的一组规范正交基，则有以下几条与其等价的性质：

1. 若 $f \in \mathcal{H}$ 且对所有 j ，$(f, e_j) = 0$ ，则 $f = 0$。

2. 若 $f \in \mathcal{H}$, $S_N(f) = \sum_{k=1}^{N}(f, e_k)e_k$ ，则 $N \to \infty$ 时 $S_N(f)$ 依范数收敛于 f。

3. 若 $a_k = (f, e_k)$ ，则 $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$。

这里的证明也是容易的，同时（2）和（3）分别就是在傅里叶级数中我们熟悉的均方收敛和 Parseval 恒等式。

此外，我们可以证明任何一个可分的希尔伯特空间都有规范的正交基，该证明是构造性的，构造的过程和 R^n 中的 Gram–Schmidt 正交化类似。

4.2.3 酉映射

定义 4.2.3. 设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是两个希尔伯特空间，若映射 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ 满足

1. U 是双射，且是线性映射。

2. U 是保内积的，即对任意的 $f, g \in \mathcal{H}$ ，有 $(f, g)_{\mathcal{H}} = (Uf, Ug)_{\mathcal{H}'}$。

则称 U 是一个酉映射。

从定义可以看出，U 也是保范数的。那么如果 U 是保范数的，结合 (1) 可以推出 U 保内积吗，答案是肯定的。我们只需注意到如下的恒等式：

$$(F, G) = \frac{1}{4}\left[\|F+G\|^2 - \|F-G\|^2 + i\left(\|\frac{F}{i} + G\|^2 - \|\frac{F}{i} - G\|^2\right)\right]$$

这可以看作极化恒等式的推广，它告诉我们内积可由范数表示。

若 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是两个希尔伯特空间，且存在酉映射 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ，则称 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是酉同构的。

定理 4.2.4. 任意两个无穷维希尔伯特空间都是酉同构的。

证明. 设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是两个无穷维希尔伯特空间，我们可以分别取它们的一组规范正交基 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}, \{e_k'\}_{k=1}^{\infty}$ ，我们按如下方式定义映射 U ：若 $f \in \mathcal{H}$ ，且 $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ ，则

$$Uf = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k'$$

容易看出这样定义的 U 是线性的，且由 Parseval 恒等式

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|Uf\|_{\mathcal{H}'}$$

这就证明了 U 是酉映射，从而 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 是酉同构的。 □

4.3 闭子空间和正交投影

我们接着考察希尔伯特空间上的一些代数结构。

定义 4.3.1. 设 $\mathcal{S}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的子集，若对任意的 $f,g\in\mathcal{S}$ 和 $a,b\in\mathbb{C}$ ，都有 $af+bg\in\mathcal{S}$ ，则称 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{H}$ 的线性子空间。

这个和 R^n 上的子空间的定义是类似的，强调运算的封闭性。然而若 $\mathcal{H}$ 是无穷维的，其线性子空间 $\mathcal{S}$ 不一定是闭的，即对极限运算不封闭，这是和有限维情形的一个显著差异。一个常见的例子是 $L^2([-\pi,\pi])$ ，$[-\pi,\pi]$ 上的全体黎曼可积函数是其的一个线性子空间，但显然这个空间不是闭的，因为黎曼可积函数列的极限可能不是黎曼可积的。

接下来我们研究闭子空间的一些重要的几何性质。

引理 4.3.2. 假设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间，且 $f\in\mathcal{H}$ ，则

1. $\mathcal{S}$ 中存在唯一的离 f 最近的元素 g_0 ，即

$$\|f-g_0\|=\inf_{g\in\mathcal{S}}\|f-g\|$$

2. $(f-g_0)\perp\mathcal{S}$ ，即对任意的 $g\in\mathcal{S}$ ，都有 $(f-g_0,g)=0$。

直观来讲，g_0 可看作 f 在 S 上的投影。这个结论在有限维希尔伯特空间上是容易证明的，只需要利用 $\mathcal{S}$ 的列紧性。

证明. 先假设 $\mathcal{H}$ 是有限维的。若 $f\in\mathcal{S}$ ，则取 $g_0=f$ 即可；若 $f\in\mathcal{S}$ ，则令 $d=\inf_{g\in\mathcal{S}}\|f-g\|$ ，我们有 $d>0$ 且存在 $\mathcal{S}$ 中的序列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得 $\lim_{n\to\infty}\|f-g_n\|=d$ 。由于 $\mathcal{S}$ 是列紧的，故 $\{g_n\}$ 有收敛子列。记该极限为 g_0 即有 $\|f-g_0\|=d$。

若 $\mathcal{H}$ 是无穷维的，上述的证明将会失效，因为在无穷维线性空间上，有界闭集不一定有列紧性（一组规范正交基即是反例）。为证明引理，我们将应用平行四边形法则：

$$\|A+B\|^2+\|A-B\|^2=2\|A\|^2+2\|B\|^2$$

将范数用内积的形式表达即可验证。现令 $A=f-g_n$, $B=f-g_m$ ，得到

$$\|2f-(g_n+g_m)\|^2+\|g_m-g_n\|^2=2\left[\|f-g_n\|^2+\|f-g_m\|^2\right]$$

又因为 $\frac{1}{2}(g_n+g_m)\in\mathcal{S}$ ，所以

$$\|2f-(g_n+g_m)\|=2\left\|f-\frac{1}{2}(g_n+g_m)\right\|\geq 2d$$

进而

$$\begin{aligned}\|g_m-g_n\|^2&=2\left[\|f-g_n\|^2+\|f-g_m\|^2\right]-\|2f-(g_n+g_m)\|^2\\&\leqslant 2\left[\|f-g_n\|^2+\|f-g_m\|^2\right]-4d^2.\end{aligned}$$

令 $m,n\to\infty$ ，有 $\|g_m-g_n\|\to 0$ ，这说明 $\{g_n\}$ 是一个柯西列。又因为 $\mathcal{H}$ 是完备的且 $\mathcal{S}$ 是其闭子空间，所以 $\{g_n\}$ 会收敛于 $\mathcal{S}$ 中的一个元素 g_0。

下面我们证明若 $g\in\mathcal{S}$ ，则 $g\perp(f-g_0)$ 。由 g_0 的定义，对每个实数 ε ，我们有

$$\|f-(g_0-\varepsilon g)\|^2\geq\|f-g_0\|^2$$

展开后移项有

$$2\varepsilon\operatorname{Re}(f-g_0,g)+\varepsilon^2\|g\|^2\geq 0$$

由 ε 的任意性，关于 ε 的二次方程的判别式 $\Delta=(\operatorname{Re}(f-g_0,g))^2\leq 0$ ，这说明 $\operatorname{Re}(f-g_0,g)=0$ 。类似地

$$\|f-(g_0-i\varepsilon g)\|^2\geq\|f-g_0\|^2$$

展开后再次利用判别式可得 $\operatorname{Im}(f-g_0,g)=0$ ，综上有 $(f-g_0,g)=0$。

最后假设 g_0' 也是 $\mathcal{S}$ 中一个满足和 f 距离最小的元素，则由 $(f-g_0)\perp(g_0-g_0')$ 可得

$$\|f-g_0'\|^2=\|f-g_0\|^2+\|g_0-g_0'\|^2$$

这表明 $\|g_0-g_0'\|=0$ ，即 $g_0=g_0'$ ，综上引理得证。 □

我们可以定义子空间 $\mathcal{S}$ 的正交补 $\mathcal{S}^\perp$ 为:

$$\mathcal{S}^\perp=\{f\in\mathcal{H}:(f,g)=0,\forall g\in\mathcal{S}\}$$

显然 $\mathcal{S}^\perp$ 是一个闭的线性子空间。若 $\mathcal{S}$ 是闭的，则 $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}^\perp=\{0\}$ ，这是因为若 $f\in\mathcal{S}\cap\mathcal{S}^\perp$ ，则 $(f,f)=0$ ，故 $f=0$。

一个闭的子空间与其正交补的公共元素只有零向量，这启发我们可以对 $\mathcal{H}$ 做直和分解:

$$\mathcal{H}=\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^\perp$$

根据线性空间的理论，我们只需要证明每个 $f\in\mathcal{H}$ 可写成 $g+h$ ，其中 $g\in\mathcal{S}, h\in\mathcal{S}^\perp$ ($\mathcal{S}\cap\mathcal{S}^\perp=\{0\}$ 可保证分解的唯一性)。根据引理 4.3.2 我们可以找到 $\mathcal{S}$ 中离 f 距离最近的元素 g_0 ，并将 f 写成 $g_0+(f-g_0)$ ，我们有 $f-g_0\in\mathcal{S}^\perp$ ，这就证明了 $\mathcal{H}=\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^\perp$。

有了这样的直和分解，我们可以很自然的定义投影映射

$$P_{\mathcal{S}}(f)=g,\quad \text{其中} f=g+h,\ g\in\mathcal{S},\ h\in\mathcal{S}^\perp$$

映射 $P_{\mathcal{S}}$ 称为在 $\mathcal{S}$ 上的正交投影，有如下的性质:

1. $P_{\mathcal{S}}$ 是线性映射。
2. 若 $f\in\mathcal{S}$ ，则 $P_{\mathcal{S}}(f)=f$。
3. 若 $f\in\mathcal{S}^\perp$ ，则 $P_{\mathcal{S}}(f)=0$。
4. 对所有 $f\in\mathcal{H}$ ，有 $\|P_{\mathcal{S}}(f)\|\leq\|f\|$。

4.4 线性算子理论初步

4.4.1 介绍

定义 4.4.1. 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个希尔伯特空间，映射 $T:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ 称为一个线性算子，如果对任意的 $k\in\mathbb{C}$ 和 $f,g\in\mathcal{H}_1$ ，有

$$T(kf+g)=kT(f)+T(g)$$

若存在 $M>0$ 使得

$$\|T(f)\|_{\mathcal{H}_2}\le M\|f\|_{\mathcal{H}_1}$$

则称 T 是有界的，并定义 T 的范数为

$$\|T\|=\inf M$$

其中下确界对所有满足 $\|T(f)\|_{\mathcal{H}_2}\le M\|f\|_{\mathcal{H}_1}$ 的 M 取。

同时若对收敛于 f 的序列 $\{f_n\}$ ，有 $\{Tf_n\}$ 收敛于 Tf ，则称 T 是连续的。容易证明线性算子 T 是连续的当且仅当 T 是有界的。

引理 4.4.2. $\|T\|=\sup\{|(Tf,g)|:\|f\|,\|g\|\le 1\}$ ，其中 $f\in\mathcal{H}_1$, $g\in\mathcal{H}_2$。

证明. 记 $A=\sup\{|(Tf,g)|:\|f\|,\|g\|\le 1\}$。

一方面，若 $\|T\|\le M$ ，则由 Cauchy–Schwarz 不等式，$\|f\|,\|g\|\le 1$ 时，我们有

$$|(Tf,g)|\le\|Tf\|\,\|g\|\le M\|f\|\,\|g\|\le M$$

因此 $A\le\|T\|$。

另一方面，我们希望证明 $\|T\|\le A$ ，即证对任意的 $f\in\mathcal{H}_1$ ，有 $\|Tf\|\le A\|f\|$。

若 $f=0$ 或 $Tf=0$ ，这是显然成立的，以下考虑它们都不为零，则令

$$f'=f/\|f\|,\qquad g'=Tf/\|Tf\|$$

此时有 $\|f\|=\|g\|=1$ 且由 A 的定义知 $|(Tf',g')|\le A$ ，于是我们有

$$A\ge|(Tf',g')|=\frac{|(Tf,Tf)|}{\|f\|\,\|Tf\|}=\frac{\|Tf\|}{\|f\|}$$

即得 $\|Tf\|\le A\|f\|$。

综上所述引理得证。该引理提供了一个刻画算子的范数的方法。 □

4.4.2 线性泛函与 Riesz 表示定理

希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的线性泛函 ℓ 是一个 $\mathcal{H}$ 到复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性映射。一个自然的例子是对于固定的 $g \in \mathcal{H}$ ，我们定义 $\ell(f) = (f, g)$ 。显然 ℓ 是线性的，且根据 Cauchy–Schwarz 不等式 $|(f, g)| \leq \|g\| \|f\|$ ，从而我们有 $\|\ell\| = \|g\|$ ，从而 ℓ 是连续的线性泛函。事实上，这个例子从某种意义上给出了所有的线性泛函，即所谓的 Riesz 表示定理。

定理 4.4.3. *令 ℓ 为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的连续线性泛函，则存在唯一的 $g \in \mathcal{H}$ 使得*

$$\ell(f) = (f, g), \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

且 $\|\ell\| = \|g\|$。

证明. 考虑如下定义的子空间

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{H} : \ell(f) = 0\}$$

由于 ℓ 是连续的，故这是一个闭子空间，从而有 $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^{\perp}$ 。若 $\mathcal{S} = \mathcal{H}$ ，则 $\ell = 0$ 。此时取 $g = 0$ 即可；若 $\mathcal{S} \neq \mathcal{H}$ ，则 $\mathcal{S}^{\perp}$ 非空。故可以选取 $h \in \mathcal{S}^{\perp}$ 且 $\|h\| = 1$ 。令 $g = \overline{\ell(h)} h$ ，我们断言 $\ell(f) = (f, g)$。

事实上，令 $u = \ell(f)h - \ell(h)f$ ，我们有 $\ell(u) = \ell(f)\ell(h) - \ell(f)\ell(h) = 0$ ，从而 $u \in \mathcal{S}$ 。又因为 $h \in \mathcal{S}^{\perp}$ ，我们有 $(u, h) = 0$ ，展开有

$$0 = (\ell(f)h - \ell(h)f, h) = \ell(f)(h, h) - (\ell(h)f, h) = \ell(f)(h, h) - (f, \overline{\ell(h)}h) = \ell(f) - (f, g)$$

故 $\ell(f) = (f, g)$ ，且由 g 的构造知这样的 g 是唯一的，从而定理得证。 □

4.4.3 伴随算子

Riesz 表示定理的一个最直接的应用就是证明伴随算子的存在性。

定理 4.4.4. *令 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是一个有界线性算子，则存在唯一的 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 T^* 使得*

1. $(Tf, g) = (f, T^*g)$。
2. $\|T\| = \|T^*\|$。
3. $(T^*)^* = T$。

并称 T^* 为 T 的伴随算子。(可以直观理解为矩阵转置在无穷维的推广，但性质上也有差异)

证明. 对每个固定的 $g \in \mathcal{H}$ ，定义线性泛函 $\ell_g = (Tf, g)$ 。由 Cauchy–Schwarz 不等式知 ℓ_g 是有界的。由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $h_g \in \mathcal{H}$ 使得 $\ell_g(f) = (f, h_g)$ 。我们定义 $T^*g = h_g$ ，容易证明 T^* 满足性质 (1)。

对于 (2)，由引理 4.4.2 知

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{|(Tf, g)| : \|f\|, \|g\| \le 1\} \\ &= \sup\{|(f, T^*g)| : \|f\|, \|g\| \le 1\} \\ &= \|T^*\|\end{aligned}$$

对于 (3)，注意到

$$(Tf, g) = (f, T^*g) = \overline{(T^*g, f)} = \overline{(g, (T^*)^*f)} = ((T^*)^*f, g)$$

对所有的 $f, g \in \mathcal{H}$ 成立，从而 $Tf = (T^*)^*f$ 对所有 f 成立。 □

特别地，若 $T = T^*$ ，则称 T 是一个对称算子。此时我们有

$$\|T\| = \sup\{|(Tf, f)| : \|f\| = 1\}$$

证明可以利用极化恒等式（对就是高中数学的那个极化恒等式的推广）

$$(Tf, g) = \frac{1}{4}[(T(f+g), f+g) - (T(f-g), f-g) + i(T(f+ig), f+ig) - i(T(f-ig), f-ig)]$$

和 (Tf, f) 是实数这一事实（这是因为 $(Tf, f) = (f, Tf) = \overline{(Tf, f)}$ ），我们有

$$\mathrm{Re}(Tf, g) = \frac{1}{4}[(T(f+g), f+g) - (T(f-g), f-g)]$$

接着应用平行四边形法则和引理 4.4.2 即可得到。

4.4.4　紧算子

我们知道在 R^n 中，紧集是和有界闭集等价的。然而这一点在无穷维线性空间中并不成立。考虑如下的反例：

$$B = \{f \in \mathcal{H} : \|f\| \le 1\}$$

即希尔伯特空间中的单位闭球，显然其是有界且闭的。然而我们取 $\mathcal{H}$ 中的一组规范正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，对任意的 $m \ne n$ ，我们有 $\|e_m - e_n\|^2 = 2$ 。这表明 $\{e_n\}$ 不存在收敛子列，故 B 不是列紧的，从而不是紧的。

定义 4.4.5. 设 X, Y 是两个赋范线性空间，$T : X \to Y$ 是线性算子，若 X 的任意有界集在 Y 中的像的闭包为紧集，则称 T 是一个紧算子。

等价地说，T 是一个紧算子当且仅当只要 $\{f_n\}$ 是 X 中的有界序列，就存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $\{Tf_{n_k}\}$ 收敛。

若 T 的值域是有限维的，则称 T 是有限秩的，显然有限秩算子一定是紧算子。

性质 4.4.6. 设 T 希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的紧算子，则

1. 若 S 也是 $\mathcal{H}$ 上的紧算子，则 ST 和 TS 也是紧的。
2. 若 $\{T_n\}$ 是一列紧算子，且存在线性算子 T 使得 $\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$ ，则 T 也是紧的。
3. 若 T 是紧算子，则存在有限秩的算子列 $\{T_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$。
4. T 是紧的当且仅当 T^* 是紧的。

证明. 对于 (1)，注意到一个紧算子是有界的，所以是连续的，进而若 $\{Tf_{n_k}\}$ 收敛，则 $\{STf_{n_k}\}$ 收敛。这表明 ST 是紧的，同理 TS 也是紧的。

对于 (2)，我们利用对角线方法证明。设 $\{f_k\}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个有界序列，由于 T_1 是紧的，故可以选取 $\{f_k\}$ 的子列 $\{f_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\{T_1f_{1,k}\}$ 收敛。同理可以在 $\{f_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 中选取子列 $\{f_{2,k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\{T_2f_{2,k}\}$ 收敛。以此类推，对每个 n ，我们可以得到序列 $\{f_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ ，满足 $\{T_nf_{n,k}\}$ 收敛且每一个序列都是上一个序列的子列。令 $g_k=f_{k,k}$ ，则由 $\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$ 知存在 m 使得 $\|T_m-T\|<\varepsilon/3$ ，同时存在充分大的 k,l 使得 $\|T_m(g_k)-T_m(g_l)\|<\varepsilon/3$ 。从而对充分大的 k,l 我们有

$$\|T(g_k)-T(g_l)\|\le\|T(g_k)-T_m(g_k)\|+\|T_m(g_k)-T_m(g_l)\|+\|T_m(g_l)-T(g_l)\|<\varepsilon$$

所以 $\{T(g_k)\}$ 是柯西列，从而收敛，这就证明了 T 是紧算子。

对于 (3) 取 $\mathcal{H}$ 中的一组规范正交基 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，定义 P_n 为到 $\{e_k\}_{k>n}$ 张成的子空间的正交投影，即

$$\text{若} f=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke_k,\quad \text{则} P_n(f)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_ke_k$$

显然 $\|P_nT\|$ 关于 n 单调递减。我们断言当 $n\to\infty$ 时，$\|P_nT\|\to 0$ 。采用反证法，若不然，则存在某个 $c>0$ ，使得 $\|P_nT\|\ge c$ 恒成立。由算子范数的性质，对每个 n ，存在函数 $\|f_n\|=1$ 且 $\|P_nTf_n\|\ge c$ 。因为 T 是紧算子，故对序列 $\{f_n\}$ 存在收敛的子列 $\{Tf_{n_k}\}$ 。假设 $Tf_{n_k}\to f$ ，我们考虑估计 $\|P_nf\|$ 的大小。

一方面，由 P_n 的定义显然有 $\lim_{n\to\infty}\|P_nf\|=0$。

另一方面，我们有

$$\|P_{n_k}f\|=\|P_{n_k}Tf_{n_k}-P_{n_k}T(f_{n_k}-f)\|\ge\|P_{n_k}Tf_{n_k}\|-\|P_{n_k}T(f_{n_k}-f)\|\ge c-\varepsilon$$

这和 $\lim_{n\to\infty}\|P_nf\|=0$ 矛盾！所以 $\|P_nT\|\to 0$。考虑算子 $T_n=(I-P_n)T$ ，其中 I 为恒等算子。显然每个 T_n 都是有限秩的，而且

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n-T\|=\lim_{n\to\infty}\|-P_nT\|=0$$

从而 (3) 得证。

对于 (4)，沿用 (3) 中的 P_n ，考虑有限秩的算子 $T_n=T^*(I-P_n)$ ，则

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n-T^*\|=\lim_{n\to\infty}\|-T^*P_n\|=\lim_{n\to\infty}\|(P_nT)^*\|=\lim_{n\to\infty}\|P_nT\|=0$$

再由 (2) 知，T^* 也是紧算子，从而 (4) 得证。 □

4.4.5 对角化与谱定理

接下来我们引入无穷维对角化的概念：

定义 4.4.7. 设 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的一组正交基。若线性算子 T 满足 $T\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ ，则称 T 是关于 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可对角化的，λ_k 是对应的特征值 (像是矩阵对角化在无穷维的推广)。此时若 $f \sim \sum a_k\varphi_k$ ，则 $Tf \sim \sum a_k\lambda_k\varphi_k$。

和有限维的情形类似，我们有如下的一些简单结论：

1. $\|T\| = \sup\limits_k |\lambda_k|$。
2. T 是对称算子当且仅当其所有特征值都是实的。
3. T 是酉算子当且仅当所有特征值的模长为 1。
4. T 是正交投影当且仅当所有的特征值等于 0 或 1。

我们知道在有限维线性空间中，实对称矩阵有一个非常良好的性质——正交对角化，即对实对称矩阵 A ，存在正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = I$ 。那么我们自然会问，这个结论是否可以推广到无穷维的情形，即对于对称的线性算子，其是否也可被对角化呢？接下来我们证明紧对称算子的情形，至于一般的对称算子将放在后面进行更深入的讨论。

定理 4.4.8 (谱定理)**.** 设 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个紧对称算子，则存在 $\mathcal{H}$ 中一组由 T 的特征向量构成的正交基 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 。此外如果 $T\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ ，则 $\lambda_k \in \mathbb{R}$ 且 $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0$ 。换言之，T 的特征值都是实的且趋近于 0 。反之，任何可以写成上述形式的算子都是紧且对称的。

证明. 首先证明几个引理，看看这里的紧和对称分别提供了什么性质。

引理 4.4.9. 如果 T 是有界且对称的线性算子，则 T 的特征值是实的，且对应不同特征值的特征向量正交。

证明. 证明思路和有限维的类似，假设 $Tf = \lambda f$ ，则由对称算子的性质

$$\lambda(f,f) = (Tf,f) = (f,Tf) = \overline{\lambda}(f,f)$$

这表明 λ 是实的。

再假设 $Tf_1 = \lambda_1 f_1$, $Tf_2 = \lambda_2 f_2$ 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则由

$$\lambda_1(f_1,f_2) = (Tf_1,f_2) = (f_1,Tf_2) = \lambda_2(f_1,f_2)$$

从而 $(f_1,f_2) = 0$ ，即 f_1, f_2 正交。 □

引理 4.4.10. 如果 T 是紧算子，则对于任意的 $\lambda \neq 0$ ，$\lambda I - T$ 的零空间是有限维的。且 T 的不同特征值对应的特征向量张成的线性空间是有限维的。

证明. 用反证法证明第一个结论。若不然，则 $\lambda I - T$ 的零空间中存在一组标准正交基 $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ，由于 T 是紧算子，故存在子列 $\{\phi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\{T\phi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛。然而对任意的 $i \neq j$ 有

$$\|T\phi_{n_i} - T\phi_{n_j}\| = \|\lambda\phi_{n_i} - \lambda\phi_{n_j}\| = \sqrt{2}\lambda$$

矛盾！从而 $\lambda I - T$ 的零空间是有限维的。同理也可以这样证明第二个结论。 □

现在回到谱定理的证明，T 是对称的，故由引理 4.4.9 ，(Tf, f) 是实数。根据 $\|T\|$ 的刻画

$$\|T\| = \sup\{|(Tf, f)| : \|f\| = 1\}$$

我们有 $\|T\| = \sup\{(Tf, f) : \|f\| = 1\}$ 或 $-\|T\| = \inf\{(Tf, f) : \|f\| = 1\}$ 。如果是前一种情形，我们断言 $\|T\|$ 是 T 的一个特征值。记 $\|T\| = \lambda$ ，我们可以选取序列 $\{f_n\}$ 使得 $\|f_n\| = 1$, $(Tf_n, f_n) \to \lambda$ 以及 $\{Tf_n\} \to g$。（最后一点由 T 是紧算子保证）此时我们有

$$\begin{aligned}\|Tf_n - \lambda f_n\|^2 &= \|Tf_n\|^2 - 2\lambda(Tf_n, f_n) + \lambda^2\|f_n\|^2 \\ &\leq \lambda^2\|f_n\|^2 - 2\lambda(Tf_n, f_n) + \lambda^2\|f_n\|^2 \\ &= 2\lambda(\lambda - (Tf_n, f_n))\end{aligned}$$

这表明 $Tf_n \to \lambda f_n$ ，进而 $\lambda f_n \to g$ 。又因为 T 是连续的线性算子，所以 $T(\lambda f_n) = \lambda T f_n \to \lambda g$ 。综上我们可以得到 $Tg = \lambda g$ ，即 g 是 T 的一个特征向量，$\lambda = \|T\|$ 是对应的特征值。

对应第二种情形，同理也有 $-\|T\|$ 是 T 的一个特征值。

现在我们记 $\mathcal{S}$ 为 T 的所有特征向量张成的线性子空间的闭包，由刚刚的论述知，$\mathcal{S}$ 非空。如果 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{H}$ 的真子空间，则 $\mathcal{S}$ 的正交补 $\mathcal{S}^{\perp}$ 非空。容易看出 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}^{\perp}$ 对变换 T 都是封闭的，且 T 在其上的限制 T_1,T_2 也是紧且对称的。重复 $\|T\|$ 是 T 的一个特征值的论述可知 $\|T_2\|$ 是 T_2 的特征值，故 $\mathcal{S}^{\perp}$ 中存在 T_2 的特征向量 g' 。g' 自然也是 T 的一个特征向量，这和 $\mathcal{S}$ 的定义矛盾！从而 $\mathcal{S}$ 不是 $\mathcal{H}$ 的真子空间，即 $\mathcal{S} = \mathcal{H}$ ，从而 T 的特征向量构成了 $\mathcal{H}$ 上的一组规范正交基。且由引理 4.4.10 知 T 的特征值都为实的且趋近于 0。

综上所述，谱定理得到了证明。

反之若一个线性算子 T 满足以上性质，显然 T 是对称的。再考虑 $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k$ ，则由 $\varphi_n \to 0$ 知 $T_n \to T$ 且每个 T_n 是紧的，从而 T 也是紧的。 □